UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

64. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1960)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

64. Band./4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Wagner, R. Ein Verfolgungsproblem 305

Erdös, P. Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe . 314

Yung-ming Chen. On Products of Power Series 317

Kurepa, S. Functional Equation $F(x+y)F(x-y) = F^2(x) - F^2(y)$ in n-dimensional Vector Space 321

Groemer, H. Über den Minimalabstand der ersten N Glieder einer unendlichen Punktfolge 330

Nöbauer, W. Zur Theorie der Vollideale II 335

Hadwiger, H. Zur Eulerschen Charakteristik euklidischer Polyeder 349

Meulenbeld, B. New Recurrence Formulas for the $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$ . . 355

Schneeberger, H. Linearitätsteste der k-dimensionalen Regressionsgleichung und Anwendungen 361

Fejes Tóth, L. Über eine Volumenabschätzung für Polyeder 374

Buchbesprechungen 378

Ein Verfolgungsproblem

Von

Richard Wagner, Karlsruhe

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 30. September 1959)

Auf einer Kreislinie läuft ein Punkt $\mathfrak{e}(t)$ *mit fester Geschwindigkeit*; *t sei die Zeit. Ein zweiter Punkt* $\mathfrak{x}(t)$ *in der Ebene E des Kreises hat dieselbe feste Geschwindigkeit wie* $\mathfrak{e}$ *und bewegt sich in jedem Moment in Richtung auf* $\mathfrak{e}$ *zu.*

Gibt es Ausgangspositionen $\mathfrak{x}(0) \neq \mathfrak{e}(0)$ *von der Art, daß* $\mathfrak{e}$ *durch* $\mathfrak{x}$ *in endlicher Zeit eingeholt wird?*

I.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir

$$\mathfrak{e}(t) = (\sin t, -\cos t)$$

an; $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}$ haben dann beide die Geschwindigkeit 1. Mit $\alpha(t)$ bezeichnen wir den Richtungswinkel des Einheitsvektors $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ gegen den Vektor $\mathfrak{e}(0) = (0, -1)$:

$$\dot{\mathfrak{x}} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$$

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \dot{\alpha}(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Die Verfolgungsbedingung lautet

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{x} + r\,\dot{\mathfrak{x}},$$

wobei der zeitabhängige Skalarfaktor r die Bedeutung $r = |\mathfrak{e} - \mathfrak{x}| > 0$ hat. Differentiation der Verfolgungsbedingung liefert

$$\dot{\mathfrak{e}} = (1 + \dot{r})\,\dot{\mathfrak{x}} + r\,\ddot{\mathfrak{x}},$$

oder in Koordinaten

$$\begin{aligned} \cos t &= (1 + \dot{r})\sin\alpha + r\,\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \sin t &= -(1 + \dot{r})\cos\alpha + r\,\dot{\alpha}\sin\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 + \dot{r} = \sin(\alpha - t) \\ r\,\dot{\alpha} = \cos(\alpha - t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Es liegt nahe, die Verfolgungskurven statt in der Ebene E in einer mit dem Ortsvektor $\mathfrak{e}(t)$ starr verbundenen Ebene B zu untersuchen. Setzen wir dementsprechend

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha - t, \qquad (1.2)$$

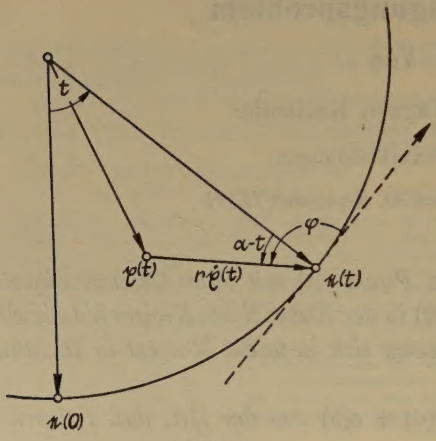

Abb. 1

so sind r, φ gewöhnliche Polarkoordinaten des Punktes $\mathfrak{x}$ in B, und der Punkt $\mathfrak{e}$ entspricht dem Nullpunkt $r=0$ (Abb. 1). Das Differentialgleichungssystem (1.1) nimmt wegen $\dot{\varphi} = \dot{\alpha} - 1$ die Gestalt

$$\begin{cases} \dot{r} = -(1 + \cos\varphi) \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{r} - 1 \end{cases} \qquad (S)$$

an. Jeder Lösung $r(t)$, $\varphi(t)$ von (S) mit Anfangswerten $r_0 = r(0) > 0$, $\varphi_0 = \varphi(0)$ entspricht in E eine im Punkte

$$\mathfrak{x}(0) = (r_0 \cos\varphi_0,\ r_0 \sin\varphi_0 - 1)$$

beginnende Verfolgungskurve

$$\mathfrak{x}(t) = (r\cos(\varphi + t) + \sin t,\ r\sin(\varphi + t) - \cos t)$$

und umgekehrt.

II.

Auf Grund der allgemeinen Theorie gibt es im t, r, φ-Raum durch jeden Punkt mit $r > 0$ genau eine Lösungskurve von (S). Die in die r, φ-Ebene B projizierten Kurven — von jetzt an wollen wir diese als Lösungskurven bezeichnen — bleiben bei t-Verschiebungen ungeändert; sie bedecken also ihrerseits die Ebene B mit Ausnahme des Nullpunktes lückenlos und schlicht. Im übrigen sind alle Lösungskurven für $r > 0$ frei von Singularitäten, da ihr Linienelement angebbar positiv ist:[1]

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 2(1 + \cos\varphi) - 2r\sin\varphi + r^2 \geqq [\sqrt{1 + r^2} - 1]^2.$$

Insbesondere können die Kurven — wenn überhaupt — nur im Nullpunkt aufhören.

[1] Verifikation der Ungleichung etwa mittels $r = \operatorname{tg}\varrho$.

Wir greifen irgendeine Lösungskurve k heraus, wählen etwa $t = 0$ als Anfangsparameter und setzen die Kurve im Sinne wachsender t so weit wie möglich fort; $0 \leqslant t < T$ sei das dabei durchmessene Zeitintervall. Je nachdem, ob es endlich ist oder nicht, sprechen wir von einer *Lösungskurve endlichen* oder *unendlichen Typs*. Unser Ziel ist der Beweis folgender Behauptungen:

(2.1) *Trifft k die Kreisscheibe $0 < r \leqslant \sin\varphi$, d. h. gibt es einen Zeitpunkt t_0 mit*

$$0 < r(t_0) \leqslant \sin\varphi(t_0);\ 0 \leqslant t_0 < T,$$

so ist k vom unendlichen Typ, und es gilt

$$\lim_{t \to T} \varphi(t) = \pi - 0;\ \lim_{t \to T} r(t) = +0.$$

(2.2) *Bleibt k außerhalb der erwähnten Kreisfläche:*

$$r(t) > \sin\varphi(t) \text{ für } 0 \leqslant t < T,$$

so ist k vom endlichen Typ, und es gilt

$$\lim_{t \to T} \varphi(t) = \lim_{t \to T} r(t) = +0.$$

(2.3) *Es gibt genau eine Lösungskurve k^* vom endlichen Typ.*

Die anfangs gestellte Frage wäre damit im wesentlichen beantwortet. Dann und nur dann, wenn die Werte r^*, φ^* in B einen Punkt der ausgezeichneten Lösungskurve k^* liefern, ist

$$\mathfrak{x}(0) = (r^* \cos\varphi^*,\ r^* \sin\varphi^* - 1) + \mathfrak{e}(0)$$

eine der gesuchten Ausgangspositionen in der festen Ebene E. Die zulässigen Anfangspunkte bilden also in E eine zu k^* kongruente Kurve (Figur 3). Braucht ein von $(r^*;\ \varphi^*)$ aus startender Punkt die Zeit t^*, um k^* bis zum Nullpunkt hin zu durchlaufen, so ist auch in E der Verfolgungsprozeß zur Zeit t^* beendet, die Verfolgungskurve trifft bei $\mathfrak{e}(t^*)$ auf die Peripherie des Einheitskreises auf.

III.

Zunächst folgt aus (S) für jede Lösung $r(t)$, $\varphi(t)$

$$-\frac{\dot{r}}{r} = (\dot{\varphi} + 1)\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} = (\dot{\varphi} + 1)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\log\frac{1}{r} = \log\sin^2\frac{\varphi}{2} + \int \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,dt.$$

Da der Logarithmus auf der rechten Seite nie positiv wird, gewinnen wir den wesentlichen Hilfssatz

(3.1) *Für jede Lösung von* (S) *mit* $\lim_{t \to T} r(t) = 0$ *divergiert das Integral* $\int^{T} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\, dt$ *an der oberen Grenze.*

Sodann bemerken wir: In jedem Punkte einer Lösungskurve, der zugleich der Kreislinie $r = \sin\varphi$ angehört, gilt $\dot{\varphi} = 0$ und $\dot{r} < 0$, so daß die Kreislinie nur von außen nach innen überschritten werden kann. Demnach ist längs einer Kurve k, die die Voraussetzung von (2.1) erfüllt,

$$0 < r < \sin\varphi;\ 0 < \varphi < \pi;\ \dot{\varphi} > 0 \text{ für } t_0 < t < T.$$

Unter diesen Umständen nimmt $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 0$ schließlich monoton ab. Bei endlichem T würde das in (3.1) genannte Integral konvergieren, $r(t)$ müßte einen positiven Grenzwert besitzen, und k hätte einen von $r = 0$ verschiedenen Endpunkt, was nicht sein kann. Also ist $T = \infty$. Weiterhin kann $\dot{r} = -(1 + \cos\varphi)$ — weil r immer positiv ist — nicht angebbar unterhalb Null bleiben. Mit Rücksicht auf $\dot{\varphi} > 0$ und $r < \sin\varphi$ erhalten wir so die in (2.1) behaupteten Limesbeziehungen.

Die betrachteten Kurven sind im Sinne unserer Fragestellung unbrauchbar, weil sie den Nullpunkt zwar erreichen, dazu aber unendlich viel Zeit brauchen.

IV.

Wir gehen über zu einer Lösungskurve k von (S), die der Voraussetzung von (2.2) genügt. Längs k ist also jetzt

$$r > \sin\varphi;\quad \dot{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{r} - 1 < 0 \text{ für } 0 \leqslant t < T.$$

Nehmen wir zunächst an, $\varphi(t)$ würde für $t \to T$ unbeschränkt abnehmen, so daß k den Nullpunkt unendlich oft umläuft. Dann müßte r oberhalb 1 bleiben, weil k den Kreis $r = \sin\varphi$ nicht betreten darf. Man erhält

$$0 > \dot{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{r} - 1 \geqslant -\left(\frac{1}{r} + 1\right) \geqslant -2.$$

Bei jeder Durchlaufung des Sektors $\pi/2 \geqslant \varphi \geqslant -\pi/2$ verstreicht deswegen mindestens die Zeit $\pi/2$; außerdem ist dabei $\dot{r} = -(1 + \cos\varphi) \leqslant -1$,

so daß r bei jedem vollen Umlauf mindestens um $\pi/2$ abnimmt. Das kann wegen $r > 0$ nur endlich oft geschehen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Es folgt die Existenz von $\lim_{t \to T} \varphi(t)$.

Im Falle $T = \infty$ dürfte für $t \to T$ nunmehr weder $\dot{r}$ noch $\dot{\varphi}$ angebbar unter Null bleiben. Im Hinblick auf $\dot{r}$ müßte $\varphi(t) \to -\pi$ streben, doch wäre dann schließlich immer $\dot{\varphi} < -1$. So gewinnen wir die Endlichkeit von T. Der Endpunkt von k muß im Nullpunkt liegen. Damit ist der Hilfssatz (3.1) anwendbar, und die Divergenz des fraglichen Integrals erfordert jetzt unbeschränktes Zunehmen von $\operatorname{ctg} \varphi/2$, d. h. r und φ streben beide nach Null, wie behauptet.

V.

Jetzt können wir die Unitätsbehauptung aus (2.3) beweisen. Jede Lösungskurve von (S), die außerhalb des Kreises $r = \sin \varphi$ bleibt, kann wegen $\dot{\varphi}(t) < 0$ durch eine im Kleinen eindeutige Funktion $r(\varphi)$ beschrieben werden, welche der Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r(1 + \cos \varphi)}{r - \sin \varphi} \tag{5.1}$$

genügt. Die in r gebrochen lineare rechte Seite von (5.1) ist bei festem φ im Bereiche $0 < \varphi < \pi$ eine monoton abnehmende Funktion von r. Für irgend zwei Lösungen $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi) > \sin \varphi$ von (5.1) ist daher

$$2(r_1 - r_2) \frac{d}{d\varphi} (r_1 - r_2) = \frac{d}{d\varphi} (r_1 - r_2)^2 \leqq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \varphi < \pi. \tag{5.2}$$

Sind beide Lösungen vom endlichen Typ, so verschwinden r_1 und r_2, also auch ihre Differenz für $\varphi \to 0$ (vgl. 2.1/2). Da andererseits diese Differenz bei abnehmendem φ dem Absolutbetrag nach nicht abnehmen kann (5.2!), muß sie identisch verschwinden. Die beiden Lösungskurven sind also wegen des gemeinsamen Endstückes überhaupt identisch, wie wir behauptet hatten.

VI.

Nun bleibt noch der Nachweis zu führen, daß eine Lösungskurve endlichen Typs wirklich existiert. Wir wählen dazu den festen Winkel $\varphi_0 = \pi/4$ und betrachten den durch die folgenden Ungleichungen beschriebenen Bereich G in der Ebene B:

$$G: \quad \begin{matrix} 3 \sin \varphi \leqq r \leqq 2 \sin \varphi + \operatorname{tg} \varphi; \\ 0 < \varphi \leqq \varphi_0 \end{matrix} \tag{6.1}$$

(Abb. 2). Die beiden krummen Randlinien haben im Nullpunkt identische Schmiegkreise, bilden also dort einen sehr spitzen Zipfel. In der Figur weicht die äußere Randlinie der Deutlichkeit wegen übertrieben stark von der inneren ab.

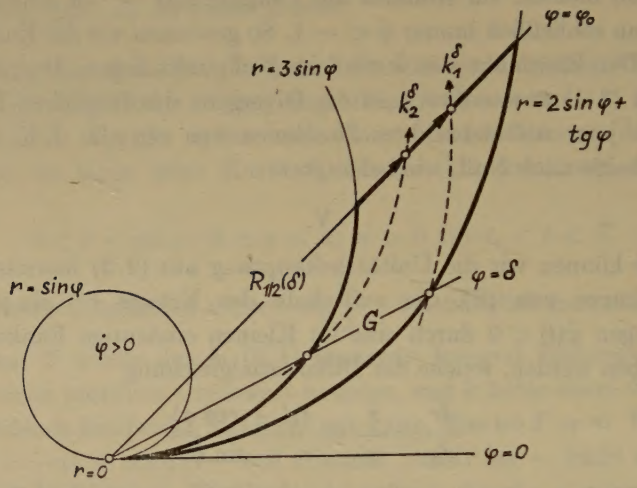

Abb. 2

Zu jedem Wert δ mit $0 < \delta < \varphi_0$ denken wir uns diejenigen beiden Lösungskurven k_1^δ und k_2^δ von (S) konstruiert, die durch die Randpunkte

$$k_1^\delta\colon\ r = 2\sin\delta + \operatorname{tg}\delta;\ \varphi = \delta$$
$$k_2^\delta\colon\ r = 3\sin\delta \qquad\quad \varphi = \delta$$

verlaufen, und verfolgen diese Kurven rückwärts im Sinne abnehmender t. Wir wollen darlegen, daß sie ins Innere von G eindringen und den Bereich nur über die Randstrecke $\varphi = \varphi_0$ wieder verlassen können.

Über die Randlinie $r = 3\sin\varphi$ hinweg kann eine nach fallenden t orientierte Lösungskurve den Bereich G nicht verlassen, denn es gilt

$$(6.2)\qquad \frac{d}{dt}\,[3\sin\varphi(t) - r(t)] = 3\,\dot{\varphi}\cos\varphi + (1+\cos\varphi) = 1 - \cos\varphi > 0,$$
$$\textit{falls } r = 3\sin\varphi > 0.$$

Unsere beiden Kurven k_1^δ und k_2^δ bleiben also — vom Anfangspunkt von k_2^δ abgesehen — ganz außerhalb des Kreises $r = 3\sin\varphi$; insbesondere ist für beide Kurven $\dot{\varphi}(t) \leqq -2/3 < 0$.

Auch die zweite Randlinie von G kann nicht überschritten werden:

$$(6.3)\quad \frac{d}{dt}[2\sin\varphi(t)+\operatorname{tg}\varphi(t)-r(t)]=\dot{\varphi}(2\cos\varphi+1+\operatorname{tg}^2\varphi)+(1+\cos\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi}[-(\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi)(2\cos\varphi+1+\operatorname{tg}^2\varphi)+(1+\cos\varphi)(2\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi)]=$$

$$=-\frac{(1+\cos\varphi)\operatorname{tg}^3\varphi}{2\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi}<0\ (0<\varphi<\pi/2),\ \textit{falls}\ r=2\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi.$$

Wegen $\dot{\varphi}\leqq -2/3$ müssen daher in der Tat beide Lösungskurven aus G heraus auf die Randstrecke $\varphi=\varphi_0$ stoßen. $R_1(\delta)$ und $R_2(\delta)$ seien die Nullpunktsabstände der beiden Schnittpunkte.

Da sich zwei Lösungskurven außerhalb des Nullpunktes nicht treffen können, ist $R_1(\delta)>R_2(\delta)$, und für $\delta\to+0$ nimmt die linke Seite dieser Ungleichung monoton ab, die rechte monoton zu. Außerdem haben wir nach (5.2)

$$0<R_1(\delta)-R_2(\delta)<(2\sin\delta+\operatorname{tg}\delta)-3\sin\delta=\operatorname{tg}\delta-\sin\delta.$$

Die betrachteten beiden Schnittpunkte konvergieren somit bei $\delta\to 0$ gegen den Punkt mit den Koordinaten

$$r^*=\lim_{\delta\to 0}R_1(\delta)=\lim_{\delta\to 0}R_2(\delta);\ \varphi^*=\varphi_0.$$

Die Lösungskurve k^* durch diesen Punkt kann keine der Kurven k_1^δ oder k_2^δ treffen, muß also für wachsendes t stets innerhalb G bleiben, bis sie in den Nullpunkt einmündet. Damit hat sich k^* als die Lösungskurve endlichen Typs ausgewiesen, und die Behauptung in (2.3) ist in allen Teilen begründet.

VII.

Die gewonnenen Resultate ermöglichen einen guten Einblick in das Verhalten der Verfolgungskurven in der festen Ebene E unmittelbar vor dem Auftreffen auf den Einheitskreis.

Nehmen wir zunächst eine Kurve mit endlicher Verfolgungszeit. Die Relation $\varphi(t)\to 0$ bedeutet, daß die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ im Endstadium einander direkt entgegenlaufen. Die Krümmung der Verfolgungskurve ist gemäß der Bedeutung des Winkels α durch

$$\dot{\alpha}=\dot{\varphi}+1=\frac{\sin\varphi}{r}$$

gegeben (vgl. 1.2). Da die Kurve innerhalb des Gebietes G nach dem Nullpunkt strebt, erhalten wir für kleine φ aus (6.1)

$$\frac{1}{3} > \frac{\sin\varphi}{r} > \frac{\cos\varphi}{2\cos\varphi + 1}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{3} + O(\varphi^2),$$

d. h. die Krümmung der Verfolgungskurve bleibt unterhalb 1/3 und konvergiert am Ende rasch gegen diesen Wert. Außerdem zeigt der Ausdruck für $\dot{\alpha}$, daß die Verfolgungskurve immer dann einen Wendepunkt macht, wenn die Kreistangente in e den Verfolger $\mathfrak{x}$ überstreicht ($\varphi = 0$ oder $= \pi$).

Bei einer Kurve mit unendlicher Verfolgungszeit strebt $\varphi(t)$ gegen π, d. h. der Punkt $\mathfrak{x}$ läuft gegen Ende hinter e her. Die Krümmung der

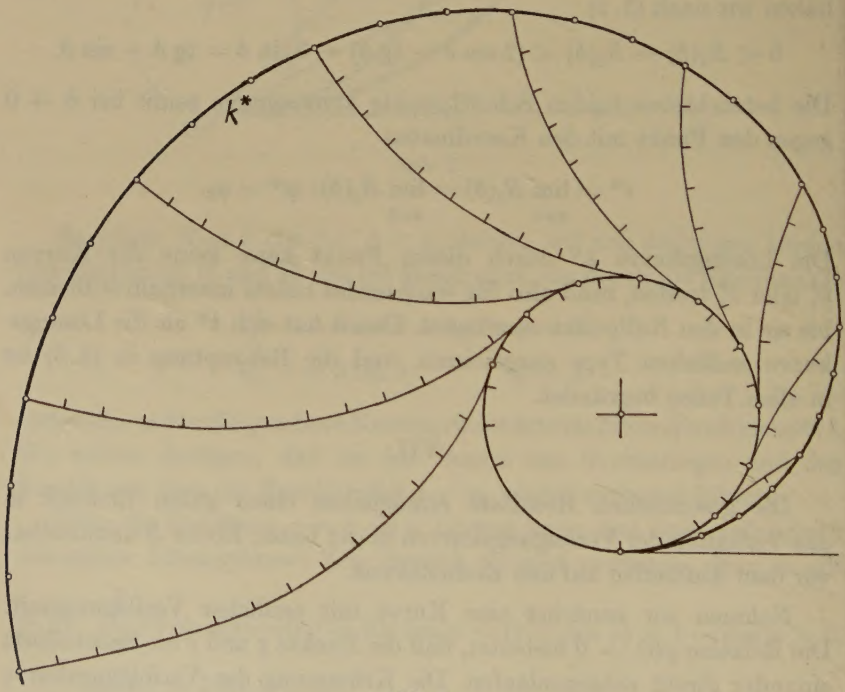

Abb. 3

Verfolgungskurve konvergiert dabei gegen 1, wie man sich überlegen kann.

Abb. 3 zeigt die in die Ebene E kongruent übertragene Kurve k^* als den geometrischen Ort der zulässigen Anfangspunkte nebst einigen von ihr ausgehenden Verfolgungskurven mit endlicher Verfolgungszeit. Diese Kurven und der Einheitskreis sind mit äquidistanten Zeitmarken versehen. Die Kurve k^* wurde durch numerische Integration des Systems (S) nach *Runge-Kutta* mit einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine (Typ Z 22) berechnet; geeignete Anfangswerte lieferte das Verfahren aus Abschnitt VI.

Es ist nicht uninteressant, zum Vergleich ein dem unseren analoges Verfolgungsproblem zu streifen. Man denke sich bei sonst ungeänderter Fragestellung den Punkt $\mathfrak{e}(t)$ nicht auf einem Kreise, sondern auf einer Geraden laufend. Das Problem ist bekanntlich elementar lösbar. Der Punkt $\mathfrak{e}$ kann nur in trivialer Weise eingeholt werden, wenn nämlich $\mathfrak{x}$ von Anfang an auf der Führungsgeraden dem Punkt $\mathfrak{e}$ direkt entgegenläuft. In allen anderen Fällen läuft $\mathfrak{x}$ schließlich mit positivem Mindestabstand hinter $\mathfrak{e}$ her. Die Rolle unserer Kurve k^* in E wird also hier durch die eine Hälfte der Führungsgeraden übernommen.

Zusatz während der Korrektur: Wie ich nachträglich bemerkt habe, diskutiert *M. L. Dunoyer* in seiner Arbeit "Sur les Courbes de poursuite d'un cercle", Nouvelles Annales de Mathématiques, ser. IV, t. 6, 193—222 (1906) das Verfolgungsproblem für beliebiges Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Punkte. Naturgemäß sind seine Methoden aufwendiger. Einige Spezialfälle, darunter der mit übereinstimmenden Geschwindigkeiten, bleiben bei *Dunoyer* ausgeschlossen.

Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe

Von

P. Erdös, Budapest

(Eingegangen am 5. Oktober 1959)

Es sei $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$. *Dann gibt es eine absolute Konstante* c, *so daß die kleinste quadratfreie Zahl in der arithmetischen Progression* $a + k\,d$, $k = 0, 1, \ldots$ *kleiner als* $c\,d^{3/2}/\log d$ *ausfällt.*

Dies ist eine kleine Verschärfung eines Satzes von *Prachar*, der $d^{3/2+\varepsilon}$ (genauer $d^{3/2}\,2^{c\log d/\log\log d}$) bewies, unsere Methode ist der Pracharschen sehr ähnlich.

Es sei L eine genügend große Zahl, die von d nicht abhängt. Die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\,d^{1/2}/\log d$ für die $a + k\,d \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $p < L$ gilt, ist wie man durch einen einfachen Siebprozeß sieht,

$$\frac{c\,d^{1/2}}{\log d} \prod_{\substack{p<L \\ p \nmid d}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) + o\left(\frac{d^{1/2}}{\log d}\right) > \frac{6}{\pi^2}\,\frac{c\,d^{1/2}}{\log d}. \tag{1}$$

Die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\,d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^2}$, ist höchstens

$$\frac{c\,d^{1/2}}{p^2 \log d} + 1.$$

Also folgt aus (1), daß die Anzahl der Zahlen k, $0 \leqslant k < c\,d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\,d \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ für alle $p \leqslant c^{1/2}\,d^{1/4}$ ist, größer ist als

$$\frac{6}{\pi^2}\,\frac{c\,d^{1/2}}{\log d} - \frac{c\,d^{1/2}}{\log d} \sum_{p \geq L} \frac{1}{p^2} - \pi(c^{1/2}\,d^{1/4}) > \tfrac{1}{2}\,\frac{c\,d^{1/2}}{\log d}, \tag{2}$$

wegen $\pi(x) < 2\,\dfrac{x}{\log x}$ für genügend großes L und c.

Nun wollen wir die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\,d^{1/2}/\log d$ abschätzen, für welche für eine Primzahl $p > c^{1/2}\,d^{1/4}$ gilt: $a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^2}$. Aus

$$a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^2},\ k < c\,d^{1/2}/\log d \qquad p > c^{1/2}\,d^{1/2} \tag{3}$$

folgt

$$a + k\,d = \alpha\,p^2,\ \alpha < d^{1/2}/\log d. \tag{4}$$

Zuerst nehmen wir an, daß $p > d^{1/2+\varepsilon}$, dann gilt offenbar $\alpha < d^{1/2-\varepsilon}$ (für $d > d_0$). Da in (4) offenbar $p < d$ ist, ist die Anzahl der Lösungen von (4) für ein fixes α höchstens gleich der Anzahl der Lösungen von $x^2 \equiv \frac{a}{\alpha} \pmod{d}$, $0 < x < d$, und dies ist bekanntlich höchstens gleich $2^{v(d)} = o(d^{\varepsilon/2})$.[1] Also ist die Anzahl der Lösungen von (4) mit $p > d^{1/2+\varepsilon}$ $o(d^{1-\varepsilon/2})$. Nun endlich sei in (4)

$$c^{1/2}\,d^{1/2} < p < d^{1/2+\varepsilon}.$$

Aus (4) folgt

$$p^2 \equiv \frac{a}{\alpha} \pmod{d},\ \alpha < d^{1/2}/\log d,\ p < d^{1/2+\varepsilon}. \tag{5}$$

Es sei c_a die Anzahl der Lösungen von (5) für fixes α. Offenbar ist $\Sigma \binom{c_a}{2}$ kleiner oder gleich der Anzahl der Lösungen von $1 \leqslant \alpha < d^{1/2}/\log d$

$$p^2 \equiv q^2 \pmod{d},\ p < d^{1/2+\varepsilon},\ q < d^{1/2+\varepsilon}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt $(p - q)(p + q) \equiv 0 \pmod{d}$. Also ist die Anzahl der Lösungen von (6) nicht größer als die Anzahl der Lösungen von

$$u\,v \equiv 0 \pmod{d},\ u < 2\,d^{1/2+\varepsilon},\ v < 2\,d^{1/2+\varepsilon}. \tag{7}$$

Aus (7) folgt

$$u\,v = \beta\,d,\ 1 \leqslant \beta < 4\,d^{2\varepsilon}.$$

Für ein festes β ist die Anzahl der Lösungen von $u\,v = \beta\,d$ gleich der Anzahl der Teiler von $\beta\,d$, also $o((\beta\,d)^{\varepsilon})$. Schließlich ist also die Anzahl der Lösungen von (7) $o((\beta\,d)^{\varepsilon})$. $4\,d^{2\varepsilon} = O(d^{4\varepsilon})$. Also ist

$$\Sigma \binom{c_a}{2} = o(d^{4\varepsilon}). \tag{8}$$

Wegen (8) gilt

$$\sum_{c_a > 1} c_a = o(d^{4\varepsilon}). \tag{9}$$

Aus (9) und $\alpha < d^{1/2}/\log d$ folgt schließlich

$$\Sigma\,c_a \leqslant \frac{d^{1/2}}{\log d} + o(d^{4\varepsilon}). \tag{10}$$

---

[1] $v(d)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primteiler von d.

Daher folgt, daß die Anzahl der Lösungen von (4) nicht größer als $d^{1/2}/\log d + o(d^{1/2-\varepsilon})$ ist, i. e. die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\, d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^2)$, $p > c^{1/2}\, d^{1/2}$ gilt, ist nicht größer als $d^{1/2}/\log d + o(d^{1/2-\varepsilon})$. Also folgt aus (2), daß die Anzahl der Zahlen k, $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\, d$ quadratfrei ist, mindestens

$$\tfrac{1}{2}\, c\, d^{1/2}/\log d - d^{1/2}/\log d - o(d^{1/2-\varepsilon}) > 0$$

für genügend großes c ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Durch etwas kompliziertere Rechnungen kann man die Bedingung $(a, d) = 1$ fallen lassen. Es gilt dann folgender Satz: *Es sei (a, d) quadratfrei. Dann ist die kleinste quadratfreie Zahl in der arithmetischen Progression $a + k\, d$ kleiner als $c\, d^{3/2} \operatorname{loglog} d/\log d$.*

Es ist wohl wahrscheinlich, daß die kleinste quadratfreie Zahl in $a + k\, d$ sogar $o(d^{1+\varepsilon})$ ist, dies ist aber wohl recht tief. Es ist leicht zu zeigen, daß die kleinste quadratfreie Zahl nicht $o(d \log d/\operatorname{loglog} d)$ sein kann.

Man kann leicht folgenden Satz zeigen: zu jedem ε existiert ein c_ε, so daß mit Ausnahme von weniger als $\varepsilon\, \varphi(d)$ Zahlen a, $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$ die kleinste quadratfreie Zahl in $a + k\, d$ kleiner als $c_\varepsilon\, d$ ist. Allgemeiner gilt, daß wenn $\sum \frac{1}{n_i} < \infty$, dann ist mit Ausnahme von weniger als $\varepsilon\, \varphi(d)$ Zahlen a, $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$ die kleinste Zahl $a + k\, d \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ n_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ kleiner als $c_\varepsilon\, d$.

On Products of Power Series

By

Yung-ming Chen, Hong Kong

(Received November 4, 1959)

1. This note is concerned with some generalizations of two theorems due to *A. M. Ostrowski*[1]. All numbers in the following are supposed real.

THEOREM A. Suppose that S_ν, T_ν are positive, and φ, Φ, Ψ, f, F are defined by

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu, \quad \Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu z^\nu, \tag{1}$$

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu z^\nu, \tag{2}$$

$$\varphi(z)\Psi(z) = f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu z^\nu, \quad \Phi(z)\Psi(z) = F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu z^\nu, \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu = \infty, \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_{\nu+1}}{T_\nu} \leqq 1. \tag{5}$$

Then we have

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{S_n} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_n}{R_n} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{S_n}. \tag{6}$$

THEOREM B. Consider two power series with positive coefficients

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu z^\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu z^\nu \tag{7}$$

and assume that

$$\frac{S_{\nu+1}}{S_\nu} \to 1, \quad \frac{T_{\nu+1}}{T_\nu} \to 1 \qquad (\nu \to \infty). \tag{8}$$

---

[1] *A. M. Ostrowski:* Three theorems on products of power series. Compositio Mathematica 14, 41—49 (1959). The following Theorems *A*, *B*, *C* include some summability theorems given in Hardy's divergent Series.

Putting

$$(\sum_0^\infty S_\nu \zeta^\nu)(\sum_0^\infty T_\nu \zeta^\nu) = \sum_0^\infty R_\nu \zeta^\nu, \tag{9}$$

we have

$$\frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} \to 1 \qquad (\nu \to \infty). \tag{10}$$

THEOREM C. Consider the four series

$$\varphi(\zeta) = \sum_0^\infty s_\nu \zeta^\nu, \ \Phi(\zeta) = \sum_0^\infty S_\nu \zeta^\nu, \ \psi(\zeta) = \sum_0^\infty t_\nu \zeta^\nu, \ \Psi(\zeta) = \sum_0^\infty T_\nu \zeta^\nu. \tag{11}$$

Let

$$\varphi(\zeta)\psi(\zeta) = \sum_0^\infty r_\nu \zeta^\nu, \ \Phi(\zeta)\Psi(\zeta) = \sum_0^\infty R_\nu \zeta^\nu. \tag{12}$$

Suppose that S_ν and T are positive and that

$$\sum_0^\infty S_\nu = \infty, \ \sum_0^\infty T_\nu = \infty, \tag{13}$$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{T_{\nu+1}}{T_\nu} \leqq 1, \ \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{S_{\nu+1}}{S_\nu} \leqq 1. \tag{14}$$

Assume further that as $\nu \to \infty$,

$$\frac{s_\nu}{S_\nu} \to \alpha, \quad \frac{t_\nu}{T_\nu} \to \beta, \tag{15}$$

where α and β are finite. Then

$$\frac{r_\nu}{R_\nu} \to \alpha\beta \qquad (\nu \to \infty). \tag{16}$$

2. A generalization of Theorem A is given in the following

THEOREM 1. Suppose that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_{n-\nu}}{T_{n-k}} > r > 0, \tag{17}$$

where r is an absolute constant, and k, N are any positive integers such that $0<k\leqq N$, $\nu=N, N+1, N+2, \ldots$. Then under the conditions of Theorem A with (5) replaced by (17), inequalities (6) still hold.

Proof. We first prove

$$\frac{T_{n-k}}{R_n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{18}$$

In fact, we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{T_{n-k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_0^n S_\nu T_{n-\nu}}{T_{n-k}}\geqq r\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=N}^{\infty}S_\nu=\infty. \tag{19}$$

This proves (18). Now it is sufficient to prove the right hand inequality in (6). We assume, as in Ostrowski's proof,

$$\frac{s_\nu}{S_\nu}\leqq c \qquad (\nu\geqq k). \tag{20}$$

It remains to show that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{\nu=0}^n s_\nu T_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^n S_\nu T_{n-}}\leqq c \tag{21}$$

Let $\max_{\nu<k}|s_\nu - cS_\nu| = d$. Then

$$\frac{1}{R_n}\sum_{\nu=0}^n s_\nu T_{n-\nu}-c=\frac{1}{R_n}\sum_{\nu=0}^n (s_\nu - cS_\nu)T_{n-\nu}\leqq d\sum_{\mu=0}^k\frac{T_{n-\mu}}{R_n}. \tag{22}$$

By (18), each of the $k+1$ terms $T_{n-\mu}/R_n$ on the right tends to zero, and (21) follows.

A generalization of Theorem C is given in the following

THEOREM 2. If

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_{n-\nu}}{S_{n-k}}>r>0,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T_{n-\nu}}{T_{n-k}}>r>0,\ \nu=N,N+1,\ldots, \tag{23}$$

where r is an absolute constant, and N, k are two positive integers such that $0<k\leqq N$, then Theorem C remains true if (14) is replaced by (23).

Proof. r_n/R_n is homogenous both in s_ν, S_ν, and in t_ν, T_ν of dimension 0. If α and β are different from zero, then we may assume $\alpha=\beta=1$.

$$\frac{s_\nu}{S_\nu}\to 1,\quad \frac{t_\nu}{T_\nu}\to 1\ (\nu\to\infty). \tag{24}$$

From Theorem 1,

$$\frac{\sum_{\nu=0}^n s_\nu T_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^n S_\nu T_{n-\nu}}\to 1 \qquad (n\to\infty) \tag{25}$$

and it follows from (23) that

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_{n-\nu}}{s_{n-k}} > r > 0, \qquad \nu = N, N+1, \ldots. \tag{26}$$

Assuming s_ν are all positive, applying Theorem 1, we find

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu s_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu s_{n-\nu}} = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu t_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu T_{n-\nu}} \to 1 \qquad (N \to \infty). \tag{27}$$

Multiplying (25) by (27), we get $r_n/R_n \to 1$, that is (16).

On the other hand, if without assuming that all s_ν are positive, we may follow the argument as given in Ostrowski's paper by taking $s'_\nu = \dfrac{s_\nu + A S_\nu}{1 + A}$ are positive and finally we again have $r_n/R_n \to 1$.

Other cases $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$ may be proved by a similar argument as given in Ostrowski's proof. This proves Theorem 2.

To give an elementary example: If we consider the series

$$\sum_{0}^{\infty} T_\nu \zeta^\nu = 1 + 2\zeta + \zeta^2 + 2\zeta^3 + \zeta^3 + \ldots, \tag{28}$$

then (17) is satisfied with $r = 1/3$. But (14) and (5) are not satisfied, since $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \dfrac{T_{\nu+1}}{T_\nu} = 2$.

REMARK. In (18), if we put $k < 0$, and for $k < N$, $\nu = N, N+1, N+2, \ldots$, (17) holds, then (18) still holds. For in (19) if we take $T_{n-k} = T_{n'-1}$, then we still have $\lim_{n\to\infty} \dfrac{R_n}{T_{n-k}} \to 0$. Consequently we obtain a generalization of Corollary 2 in Ostrowski's paper:

Corollary. Consider the power series

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu \zeta^\nu, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu \zeta^\nu, \quad \Phi(\zeta)\Psi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu \zeta^\nu \tag{29}$$

and assume S_ν and T_ν are positive and relation (18) holds. Then we have

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_{n+1}}{S_n} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{R_{n+1}}{R_n} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_{n+1}}{S_n}. \tag{30}$$

Functional Equation $F(x+y)\ F(x-y) = F^2(x) - F^2(y)$ in n-dimensional Vector Space

By

Svetozar Kurepa, Zagreb

(Received November 6, 1959)

Let $R = \{x, y, z, \ldots\}$ be the set of all real numbers and M the set of all square (complex) matrices of the order n. In this paper we consider a mapping $F : R \to M$ such that $F(x+y)\,F(x-y) = F^2(x) - F^2(y)$ holds for all $x, y \in R$ and $\det F(x) \neq 0$ almost everywhere. In theorem 1 we prove that a measurability of F in the Lebesgue sense implies the existence of all derivatives of F and that F satisfies differential equation $F'\,F'' = F\,F'''$. After this we find all measurable mappings F in the case $n = 1, 2, 3$.

§ 1

Theorem 1. Let $F : R \to M$ be such that

$$F(x+y)\,F(x-y) = F^2(x) - F^2(y) \tag{1}$$

holds for all $x, y \in R$ and

$$\det F(x) \neq 0 \tag{2}$$

almost everywhere.

If the restriction of F on some interval $\Delta \leq R$ is measurable in the Lebesgue sense, then

$$\frac{d^k}{dx^k}\,[F(x)]_{ij}$$

exists for all $i, j = 1, 2, \ldots, n$ and for every natural number k. Furthermore the mapping F satisfies the differential equation:

$$F'(x)\,F''(x) = F(x)\,F'''(x). \tag{3}$$

For the proof of this theorem we need two lemmas.

Lemma 1. Let P be a linear Lebesgue measurable set such that $0 < mP < \infty$.

There exists a number $a > 0$ with the property that for every $x \in (-a, a)$ there are $s_1(x), s_2(x), s_3(x) \in P$ such that $s_1(x) = s_2(x) - x/2 = s_3(x) - x_3$ ([1], lemma 1).

Lemma 2. Let $F: R \to M$ be such that (1) and (2) are satisfied. Suppose that there is a perfect set $P \leq R$ of strictly positive and finite Lebesgue's measure such that the restriction of F on P is bounded.

Then the function F is bounded on every finite interval.

Proof: If we interchange x and y in (1) and the obtained result add to (1), we find:

$$F(v)\,[F(u) + F(-u)] = 0 \tag{4}$$

where $u = x - y$ and $v = x + y$. Now (2) and (4) imply

$$F(-u) = -F(u) \tag{5}$$

for all $u \in R$. Thus F is an odd function. Setting $u = x - y$ and $v = x + y$ in (1) and using (5) we get:

$$F(v)\,F(u) = F^2\left(\frac{v+u}{2}\right) - F^2\left(\frac{v-u}{2}\right) = F^2\left(\frac{u+v}{2}\right) - F^2\left(\frac{u-v}{2}\right) = F(u)\,F(v),$$

i. e.

$$F(u)\,F(v) = F(v)\,F(u) \tag{6}$$

for all $u, v \in R$.

If we replace x by $x + y$ in (1), we get:

$$F^2(y) = F^2(x + y) - F(x + 2y)\,F(x). \tag{7}$$

Denote:

$$L = \sup\,|\,[F(x)]_{ij}\,| < \infty \quad (x \in P;\ i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

Since F is an odd function we can assume that $P \leq [0, \infty]$. According to lemma 1 there is a number $a > 0$ such that for every $2y \in [0, 2a]$ there are $s_1(2y), s_2(2y), s_3(2y) \in P$ such that:

$$s_1(2y) = s_2(2y) - 2y/2 = s_3(2y) - 2y.$$

This and (7) for $x = s_1(2y)$ imply:

$$F^2(y) = F^2\,[s_2(2y)] - F\,[s_3(2y)]\,.\,F\,[s_1(2y)]$$

which together with (8) lead to:

$$|\,[F^2(y)]_{ij}\,| \leq 2n\,L^2, \text{ i. e.}$$

the function $F^2(x)$ is bounded on the interval $\delta = [0, a]$. Obviously we can take a such that $\det F(a) \neq 0$. We assert that F is a bounded function on δ. The functional equation (1) implies:

$$F(a)\,F(v) = F^2\left(\frac{a+v}{2}\right) - F^2\left(\frac{a-v}{2}\right) \tag{9}$$

from which we get:

$$[F(v)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[F^2\left(\frac{a+v}{2}\right) - F^2\left(\frac{a-v}{2}\right)\right]_{ik} [F^{-1}(a)]_{kj}. \tag{10}$$

If $v \in \delta$, then $(a \pm v)/2 \in \delta$ too. According to (10) $[F(v)]_{ij}$ is a sum of a finite number of functions each of which is bounded on δ. Thus $F(x)$ is bounded on δ. Let $a/3 < x_0 \leq a/2$ be such that $\det F(x_0) \neq 0$. For $x = x_0$ (7) implies:

$$F(x_0 + 2\,y) = [F^2(x_0 + y) - F^2(y)]\,F^{-1}(x_0) \tag{11}$$

from which we conclude that $F(x_0 + 2\,y)$ is bounded for $y \in [0, a/2)]$. Thus $F(x)$ is bounded on the interval $[0, a + a/3] = [0, 4\,a/3]$. In the same way we conclude that F is bounded on the interval $[0, (4/3)^2 a]$. Obviously this implies that F is bounded on every finite interval of the type $[0, A]$ $(A > 0)$. Since F is an odd function, lemma 2 is proved.

Proof of theorem 1. We divide the proof in three steps.

I. F is measurable on R. Since F is an odd function which is measurable on $\Delta = [a, b]$, we can assume $0 \leq a < b$. If we put $x = a$ in (7) we get:

$$F^2(y) = F^2(a + y) - F(a + 2\,y)\,F(a)$$

from which we conclude that $F^2(y)$ is measurable on the interval $[0, (b - a)/2]$. This together with (10) imply that F is measurable on an interval of the type $[0, c]$ $(c > 0)$. From this and (11) we find F measurable on $[0, 4\,c/3]$ which implies in the same way as boundedness in lemma 2 that F is measurable on R.

II. F is summable on every finite interval. Since $[F(x)]_{ij}$ is measurable on the interval $\delta = [0, 1]$, for a given arbitrary small number $\varepsilon_{ij} > 0$ there exists ([3]) a perfect set $P_{ij} \leq \delta$ such that a) $mP_{ij} > 1 - \varepsilon_{ij}$ and b) $[F(x)]_{ij}$ is a continuous function on P_{ij}. From here we deduce the existence of a perfect set $P \leq \delta$ of strictly positive measure on which $F(x)$ is continuous. Since F is continuous on P it is also bounded on P. This and lemma 2 imply that F is bounded on every finite interval which together with I imply II.

III. F possesses derivatives of all orders. According to (6) the matrices $F(x)$ form an Abel system of matrices. It is sufficient to consider (1) under the assumption that the system $\{F(x)\}$ is not completely reducible. This we do from now on. But then (6) implies ([2] lemma 1), that

every $F(x)$ has one and only one eigenvalue, say $f(x)$. Since F is summable on every finite interval the matrix

$$I^{ab} = \int_a^b F(s)\,ds = \left(\int_a^b [F(s)]_{ij}\,ds\right) \tag{12}$$

is well defined. Obviously I^{ab} commutes with $F(x)$ for every $x \in R$. Since the system $\{F(x)\}$ is not completely reducible, we find:

$$\det I^{ab} = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^n. \tag{13}$$

The assumption $\det F(x) = f^n(x) \neq 0$ for almost all $x \in R$ together with (13) imply the existence of at least one pair of numbers α, β such that $\det I^{\alpha\beta} \neq 0$.

Set $a = \alpha$ and $b = \beta$ in (12), multiply (12) by $F(t)$, and use (1). The result is:

$$F(t)\,I^{\alpha\beta} = 2\int_{\frac{\alpha+t}{2}}^{\frac{\beta+t}{2}} F^2(u)\,du - 2\int_{\frac{\alpha-t}{2}}^{\frac{\beta-t}{2}} F^2(u)\,du \tag{14}$$

from which we find:

$$[F(t)]_{ik} = 2\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{\frac{\alpha+t}{2}}^{\frac{\beta+t}{2}} F^2(u)\,du - \int_{\frac{\alpha-t}{2}}^{\frac{\beta-t}{2}} F^2(u)\,du\right\}_{ij} [I^{\alpha\beta}]^{-1}_{jk} \tag{15}$$

The right side of (15) is continuous. Thus F is a continuous function on R. The continuity of F and (15) imply that $[F(t)]_{ik}$ is derivable and that this derivative is a linear combination of derivable functions $\{F^2[(\beta \pm t)/2]\}_{ij}$, $\{F^2[(\alpha \pm t)/2]\}_{ij}$. From here we deduce the existence of $\frac{d^k}{dx^k}[F(x)]_{ij}$ for all $i, j = 1, 2, \ldots n$ and for every natural number k.

If we take second derivative of (1) with respect to y and set $y = 0$ we get:

$$2F(x)F''(x) - 2F'(x)F'(x) = -[F^2(y)]''|_{y=0}. \tag{16}$$

If we take derivative of (16) we find (3). In such a way theorem 1 is completely proved.

Remark 1. The condition $\det F(x) \neq 0$ almost everywhere is essential. This follows from the fact that a function:

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix}$$

satisfies (1) for any function g. It is easy to prove that $\det F(x) = 0$ on a set of strictly positive measure implies $\det F(x) \equiv 0$.

Remark 2. If f satisfies Cauchy's functional equation, i. e. if $f(x+y) = f(x) + f(y)$, then f satisfies (1). Thus functional equation (1) has non-measurable solutions too. Furthermore lemma 2 implies, that a function which satisfies Cauchy's functional equation and which is bounded on a set of strictly positive measure is bounded on every interval.

§ 2

According to theorem 1 the problem of solving functional equation (1) is reduced on the problem of solving differential equation (3). But if $F(x)$ is a solution of (3) then it ist not neccessarily solution of (1). The neccessary condition is that F is an odd function and that $F(x)$ commutes with $F(y)$ for all $x, y \in R$. Further it is sufficient to find only such solutions $F(x)$ for which the system $\{F(x)\}$ is not completely reducible. In what follows we find all solutions of (1) in the case $n = 1, 2, 3$.

$n = 1.$

In this case $F(x) = a(x)$ is a complex-valued function. Differential equation (3) and $a(-x) = -a(x)$ imply

$$a(x) = Ax \text{ or} \tag{17}_1$$

$$a(x) = A \sin \alpha x \tag{17}_2$$

where A and α are complex constants.

$n = 2.$

Since the Abel system $\{F(x)\}$ is not completely reducible, there is a non-singular matrix T independent of x such that

$$T^{-1} F(x)\, T = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix} \tag{18}$$

for all $x \in R$. Now (3) and (18) lead to the following system of differential equations:

$$a \,.\, a''' = a'\, a'' \tag{19}$$

$$b\, a''' + a\, b''' = b'\, a'' + a'\, b'' \tag{20}$$

We have two cases to distinguish.

a) $a(x) = A\, x$. Setting this in (18), we find:

$$b(x) = A\,x(B\,.\,x^2 + C)$$

where A, B and C are constants. Thus

$$F(x) = A\,.\,x\,.\,T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\,x^2 + C & 1 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{21}$$

b) $a(x) = A \sin \alpha\, x$. Setting this in (20), we get:

$$y' - \alpha\, y \operatorname{ctg} \alpha\, x = 0 \text{ with } y = b'' + \alpha^2 b.$$

Thus $b(x) = A \sin \alpha\, x\,(B + Cx \operatorname{ctg} \alpha\, x)$ or

$$F(x) = A\,.\sin \alpha\, x\, T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B + Cx \operatorname{ctg} \alpha\, x & 1 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{22}$$

It is easy to see, that (22) and (21) satisfy functional equation (1).

$$\underline{n = 3.}$$

In this case we have two series of solutions.

I. There is $x_0 \in R$ such that

$$T^{-1} F(x_0)\, T = a(x_0)\, E + J$$

where E is the identity matrix, $J_{21} = 1$ and all other matrix elements of J are zero.

II. There is $x_0 \in R$ such that

$$T^{-1} F(x_0)\, T = a(x_0)\, E + A$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

We shall solve both of these cases and prove that they are independent one of another.

I. If a matrix A commutes with J then it is simple to see that A has the following form:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a_{21} & a & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a \end{pmatrix}$$

Since $T^{-1} F(x)\, T$ commutes with $T^{-1} F(x_0)\, T$, i.e. with J we have:

$$T^{-1} F(x)\, T = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 \\ b(x) & a(x) & c(x) \\ d(x) & 0 & a(x) \end{pmatrix}$$

for all $x \in R$. Differential equation (3) becomes:

$$a\,a''' = a'\,a'' \tag{24}$$

$$\begin{aligned} a\,c''' + c\,a''' &= a'\,c'' + c'\,a'' \\ a\,d''' + d\,a''' &= a'\,d'' + d'\,a'' \end{aligned} \tag{25}$$

$$b\,a''' + a\,b''' + c\,d''' = b'\,a'' + a'\,b'' + c'\,d'' \tag{26}$$

I a) If $a(x) = ax$ we get:

$$G(x) = T^{-1}(F(x)/a)\,T = A\,x + B\,x^3 + (3/10)\,h\,.\,f\,.\,x^5\,J \tag{27}$$

where

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & c \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and} \\ \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & h \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{28}$$

It is easy to see that $J^2 = 0$, $JB = BJ = 0$, $JA = AJ = J$ and $B^2 = hfJ$. Since $F(x)$ commutes with $F'(y)$ we find that $G(1) = A + B\,(3/10)\,hfJ$ commutes with $G'(0) = \mathrm{A}$. But this is possible only if A and B commute. On the other hand $AB - BA = (cf - hd)\,J$. Thus to (27) we have to add the condition:

$$cf - hd = 0. \tag{29}$$

If we take into account (29) then we find that (27) satisfies (1).

I b) $a(x) = a \sin \alpha\, x$. If we set this in (26) we find:

$$y' - \alpha\, y \operatorname{ctg} \alpha\, x = (c'\,d'' - cd''')/a \sin \alpha\, x,\ y = b'' + \alpha^2 b. \tag{30}$$

On the other hand equations (25) are of the same type as (20).

This gives:

$$\begin{cases} c(x)/a = c\,.\,\sin \alpha\, x + h\,.\,x \cos \alpha\, x \\ d(x)/a = d\,.\,\sin \alpha\, x + f\,.\,x \cos \alpha\, x. \end{cases} \tag{31}$$

(31) and (30) lead to the differential equation:

$$y' - \alpha\, y \operatorname{ctg} \alpha\, x = g\,[\cos \alpha\, x - (\alpha\, x/\sin \alpha\, x)] \tag{32}$$

with $g/a\,a = \alpha\, cf - 2\,hf - a\,d\,.\,h$.

An integral of (32) is $g\,.\,x\,.\cos \alpha\, x$. Using this and $b(0) = 0$ ($F(0) = 0$!) we solve (32) and we find:

$$G(x) = T^{-1}(F(x)/a)\,T = A \sin \alpha x + Bx \cos \alpha x + J\,(g/4\,da)\,x \sin \alpha\, x \tag{33}$$

where A, B and J are given by (28). Since $G'(x)$ commutes with $G(y)$

we find again $AB = BA$ or the constants c, d, f and h are subject to the condition (29). From (29) we get $g/\alpha\, a = -2\,hf$. If we take into account (29) then it is redily seen that (33) is a solution of (1). In such a way (33) and (27) are general solutions of the case I.

II. Since $G(x) = T^{-1} F(x)\, T$ commutes with Λ we find:

$$G(x) = a(x)\, E + c(x)\, \Lambda + b(x)\, \Lambda^2 \tag{34}$$

which leads on differential equations (24), (25) and (26) under the additional condition $c(x) = d(x)$.

In this case the condition (29) is satisfied and

$$T^{-1} F(x)\, T = ax\, \{E + (c + hx^2)\, \Lambda + [b + kx^2 + (3/10)\, h^2\, x^4]\, \Lambda^2\},$$

$$T^{-1} F(x)\, T = a\, .\, \sin \alpha x\, \{E + (c + hx \operatorname{ctg} \alpha x)\, \Lambda + [b - (1/2)\, h^2\, x^2 + k\, x \operatorname{ctg} x]\, \Lambda^2\}$$

are general solutions of the case II.

In such a way we have found all solutions of (1) in the case $n = 3$.

Now we can answer on the following question: Whether the complete reducibility of $F(x_0) \neq 0$ implies the corresponding complete reducibility of the whole system $\{F(x)\}$ (Sec.: [2] p. 12). The answer is negative as is shown by the example.

$$F(x) = x\, .\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x^2 - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

It is simple to see that (35) satisfies (1) and that it is not similar with the function of the following form.

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & 0 \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix}$$

On the other hand $F(1) = E + J$ is completely reducible. Moreover for every $x \neq 0$ the matrix $F(x)/x$ is similar with $E + J$. This discussion proves that cases I and II are independent one of another.

Corrolary: If a function $F(x)$ satisfies all conditions of theorem 1 and if F is a uniformly bounded function on R, then for $n = 1, 2, 3$ we have $F(x) = F \sin \alpha\, x$ for all $x \in R$ where α is a real number and F an arbitrary matrix of the order n.

Remark 3. If $F(x_0)$ is similar with $a(x_0)\, E + \Lambda$ for some $x_0 \in R$, where $\Lambda_{21} = \Lambda_{32} = \ldots \Lambda_{n, n-1} = 1$ and all other matrix elements of Λ are zero, then $F(x)$ is similar with:

$$a(x)\,E + a_1(x)\,A + \ldots + a_{n-1}(x)\,A^{n-1}.$$

Solving the corresponding differential equation (3) one can easily find that if $F(x)$ is uniformly bounded on R then $F(x) = F \,.\, \sin \alpha\, x$ where α is a real number and F is not completely reducible matrix of the order n.

Probably in general, uniform boundedness and continuity of $F(x)$ on R imply $F(x) = F \,.\, \sin \alpha\, x$.

Remark 4. Functional equation

$$F(x + y) - F(x - y) = -\,2\,G(x)\,G(y) \tag{36}$$

where $G(x)$ and $F(x)$ are matrices of the order n, can be reduced on (1). Indeed for $x = y = u/2$ (36) implies:

$$F(u) = -\,2\,G^2(u/2) + F(0). \tag{37}$$

Setting (37) in (36) we get:

$$G^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - G^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = G(x)\,G(y)$$

which is functional equation (1).

Department of Mathematics, Zagreb.

References

[1] *Kurepa S.:* A cosine functional equation in Hilbert space, Can. J. Math. **12** (1960), 45—50.

[2] *Kurepa S.:* Semigroups of linear transformations in n-dimensional vector space, Glasnik mat. fiz. i astr. **13** (1958), 3—32.

[3] *Luzin N. N.:* Sur les propriétés des fonctions mesurables. C. R. Acad. Sci. Paris, **154** (1912), 1688—1690.

Über den Minimalabstand der ersten N Glieder einer unendlichen Punktfolge

Von

Helmut Groemer, Corvallis, Ore., USA

(Eingegangen am 30. November 1959)

Unlängst wurde mehrmals folgender Satz bewiesen. (*N. G. De Bruijn* und *P. Erdös* [1], *A. Ostrowski* [2], *G. H. Toulmin* [3], *A. Schönhage* [4]).

Satz 1: Ist P_m $(m=1, 2, \ldots)$ eine Folge von Punkten, die im Intervall $[0, 1]$ liegen und ist d_N durch

$$d_N = \min_{\substack{i=1,2,\ldots N \\ k=1,2,\ldots N \\ i \neq k}} | P_i - P_k |$$

definiert, so gilt

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N d_N \leqq \frac{1}{\log 4}.$$

Es soll hier eine den n-dimensionalen Fall betreffende Verallgemeinerung des Satzes 1 bewiesen werden. Gegeben sei eine Folge von Punkten des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R_n, die alle in einer gewissen beschränkten Punktmenge $B \subset R_n$ liegen. B habe (im Jordanschen Sinne) den Inhalt 1. Unter der Distanz zweier Punkte werde die Distanz im Sinne einer Minkowskischen Metrik verstanden. Jedem Paar von Punkten P, Q des R_n sei also eine reelle Zahl $d(P, Q)$ zugeordnet, die folgende Eigenschaften hat:

I. $d(P, Q) > 0$, falls $P \neq Q$ ist.

II. $d(P, Q) = d(R, S)$, falls $P - Q = R - S$ ist.

III. Für alle reellen t ist $d(tP, tQ) = | t | d(P, Q)$.

IV. $d(P, R) \leqq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Die Minkowskische Metrik $d(P, Q)$ heiße normiert, wenn das Volumen des konvexen Körpers, der aus allen Punkten X besteht, für die

$d(P, X) \leqq 1$ gilt, den Wert 2^n hat; P ist dabei ein beliebiger aber fester Punkt.

Der folgende Satz kann nun bewiesen werden.

Satz 2: P_m sei eine Folge von Punkten, die in dem beschränkten Bereich B vom Inhalt 1 liegen. Ist $d(P, Q)$ eine normierte Minkowskische Metrik, und ist d_N durch

$$d_N = \min_{\substack{i=1,2,\ldots N \\ k=1,2,\ldots N \\ i \neq k}} d(P_i, P_k)$$

definiert, so gilt

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N d_N^n \leqq \lambda_n$$

mit

$$\lambda_n = \left(1 + n \int_0^1 \frac{(x-1)^n}{x+1}\, dx\right)^{-1}.$$

Man beachte, daß $\lambda_1 = \log 4$ ist, Satz 2 also Satz 1 enthält. Es läßt sich zeigen ([1], [3], [4]), daß λ_1 nicht verbessert werden kann. Ob dies auch für λ_n der Fall ist, weiß ich nicht. Hinsichtlich der Größenordnung von λ_n sei bemerkt, daß wegen

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{1-x^2}\, dx > \int_0^1 (1-x)^{n+1}\, dx = \frac{1}{n+2}$$

$$\lambda_n < \frac{n+2}{2(n+1)} \tag{1}$$

gilt. Der Fehler in der Abschätzung (1) ist nur $O(1/n^2)$. Satz 2 läßt sich auf viele Probleme diophantischer Approximationen anwenden, doch liefern andere Methoden im allgemeinen schärfere Resultate.

Beweis von Satz 2: Angenommen, von einem gewissen N_0 an wäre stets

$$N d_N^n > \lambda_n + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ (N \geqq N_0). \tag{2}$$

Da B den Inhalt 1 hat, existiert ein System W endlich vieler Würfel, derart daß $B \subset W$ ist und daß für den Inhalt $I(W)$ von W

$$I(W) \leqq 1 + \varepsilon \tag{3}$$

gilt. Es werde

$$k_n = (\lambda_n + \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt und für ein festes N mit $N \geqq N_0$ jedem i mit $0 \leqq i < 2^n N$

ein gewisser konvexer Körper K_i zugeordnet. K_i soll aus allen Punkten X bestehen, für die gilt

$$d(P_i, X) \leqq \frac{k_n}{2} N^{-\frac{1}{n}}, \text{ falls } 0 \leqq i < N \text{ ist}$$

und

$$d(P_i, X) \leqq \frac{k_n}{2} (2\, i^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}}), \text{ falls } N \leqq i < 2^n N \text{ ist.}$$

Zu verschiedenen i gehörige K_i haben keine gemeinsamen Punkte; denn hätten K_i und K_j mit $i \neq j$ den gemeinsamen Punkt X_0, so müßte einer der folgenden Fälle vorliegen.

Fall I: $0 \leqq i < N$, $0 \leqq j <$ N.

Für X_0 hätte man

$$d(P_i, X_0) \leqq \frac{k_n}{2} N^{-\frac{1}{n}}$$

$$d(P_j, X_0) \leqq \frac{k_n}{2} N^{-\frac{1}{n}}$$

Durch addition erhält man daraus

$$d(P_i, P_j) \leqq k_n N^{-\frac{1}{n}},$$

was der Annahme (2) widerspricht.

Fall II: $0 \leqq i < N$, $N \leqq j < 2^n N$.

Addiert man wie in Fall I die beiden Ungleichungen für $d(P_i, X_0)$ und $d(P_j, X_0)$, so ergibt sich

$$d(P_i, P_j) \leqq k_n j^{-\frac{1}{n}},$$

was wegen $j \geqq N$, $i < j$, und (2) unmöglich ist.

Fall III: $N \leqq i < 2^n N$, $N \leqq j < 2^n N$.

Die Addition der beiden entsprechenden Ungleichungen liefert

$$d(P_i, P_j) \leqq k_n (i^{-\frac{1}{n}} + j^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}}).$$

Wegen der Symmetrie in i und j darf man annehmen, daß $i \leqq j$ ist und wegen $N \leqq i$ ist $i^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}} \leqq 0$. Man erhält demnach

$$d(P_i, P_j) \leqq k_n j^{-\frac{1}{n}},$$

was abermals wegen $j \geqq N$ und $i \leqq j$ der Ungleichung (2) widerspricht.

Es sei nun D_N das Maximum der Durchmesser aller K_i, und W_N der Parallelkörper von W im Abstand D_N. Offenbar ist

$$\lim_{N \to \infty} D_N = 0.$$

Weil W ein endliches System von Würfeln ist und weil nach (3) $I(W) \leqq 1 + \varepsilon$ ist, folgt daraus für den Inhalt $I(W_N)$ von W_N

$$\lim_{N \to \infty} I(W_N) \leqq 1 + \varepsilon \tag{4}$$

Da die Menge aller Punkte X mit $d(P_i, X) \leqq 1$ den Inhalt 2^n hat, gilt für den Inhalt $I(K_i)$ von K_i

$$I(K_i) = k_n^n, \text{ wenn } 0 \leqq i < N \text{ ist,}$$

$$I(K_i) = k_n^n (2\, i^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}})^n, \text{ wenn } N \leqq i < 2^n N \text{ ist.}$$

Alle K_i sind in W_N enthalten. Es gilt demnach

$$N \frac{k_n^n}{N} + \sum_{i=N}^{2^n N-1} k_n^n (2\, i^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}})^n \leqq I(W_N).$$

Für große N ergibt sich daraus mittels der Eulerschen Summenformel unter Berücksichtigung von (4)

$$k_n^n + k_n^n \int_N^{2^n N} (2\, t^{-\frac{1}{n}} - N^{-\frac{1}{n}})^n \, dt \leqq 1 + \varepsilon + O(1).$$

Substituiert man $t = (1 + x)^n N$, so erhält man damit für $N \to \infty$

$$k_n^n + k_n^n \, n \int_0^1 \frac{(1 - x)^n}{1 + x} \, d(x) \leqq 1 + \varepsilon.$$

Gemäß der Definition von λ_n und k_n ist dies äquivalent mit

$$(\lambda_n + \varepsilon) \frac{1}{\lambda_n} \leqq 1 + \varepsilon.$$

Dies ist aber wegen $\lambda_n < 1$ nicht möglich. Die Annahme (2) ist demnach nicht richtig, und Satz 2 ist bewiesen.

Literatur

[1] *N. G. De Bruijn, P. Erdös*: Sequences of Points on a Circle, Kon. Nederl. Akad. v. Wet. Proc. 52, 1, 46—49 (1949).

[2] *A. Ostrowski*: Eine Verschärfung des Schubfächerprinzips in einem linearen Intervall, Arch. Math. 8, 1—10 (1957).

[3] *G. H. Toulmin*: Subdivisions of an Intervall by a Sequence of Points, Arch. Math. 8, 158—161 (1957).

[4] *A. Schönhage*: Zum Schubfächerprinzip im linearen Intervall, Arch. Math. 8, 327—329 (1957).

Zur Theorie der Vollideale II

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingegangen am 21. Dezember 1959)

Die von mir in früheren Arbeiten ([7], [8]) begonnene und in [9] — wir zitieren diese Arbeit im folgenden stets mit I — fortgesetzte Untersuchung der Vollideale führt auf zahlreiche Probleme verschiedenen Schwierigkeitsgrades, von denen im folgenden wieder einige behandelt werden sollen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich vor allem mit drei Fragen: Zunächst mit der Zurückführung des Studiums der Vollideale eines Polynomringes in k Unbestimmten auf das der Vollideale im Ring mit $\nu < k$ Unbestimmten; das führt zu einer Verallgemeinerung des von mir eingeführten Begriffes „Umschließungsideal" und der damit zusammenhängenden Sätze. Dann mit der Untersuchung der Frage, ob Summe und Produkt von „Restpolynomidealen" — die allgemeine Definition dieses Begriffes wird in der Arbeit vorgenommen — wieder Restpolynomideale sind; wir werden diese Frage im ersten Fall unter entsprechenden Voraussetzungen über den Grundring bejahen, im zweiten Fall verneinen. Als drittes werden wir eine spezielle Klasse von Vollidealen, nämlich die mit ihrer Ableitung — Definition dieses Begriffes in I — übereinstimmenden Vollideale, näher untersuchen.

Umschließungsideale höherer Ordnung

Es sei $\mathfrak{r}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement e. Wir bilden mit den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Vektoren $\mathfrak{x}_0 = e$, $\mathfrak{x}_1 = (x_1)$ $\mathfrak{x}_2 = (x_1, x_2) \ldots \mathfrak{x}_k = (x_1, x_2 \ldots x_k)$. Wir definieren für $\nu = 0, 1, 2 \ldots k$ die Ringe R_ν durch

$$R_\nu = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}_\nu]$$

insbesondere haben wir also $R_0 = \mathfrak{r}$. Der Einfachheit halber setzen wir $R_k = R$.

Es sei nun A ein Vollideal in R. Wir setzen für $0 \leqq \nu \leqq k$

$$\vartheta_\nu A = A \cap R_\nu \tag{1}$$

Ersichtlich ist $\vartheta_\nu A$ ein Vollideal in R_ν. Wir wollen $\vartheta_\nu A$ das Umschließungsideal ν-ter Ordnung von A nennen. Das Umschließungsideal der Ordnung 0 wollen wir so wie in den früheren Arbeiten als Umschließungsideal von A schlechthin bezeichnen.

Nun sei A_ν Vollideal in R_ν. Wir bezeichnen mit (A_ν) das von A_ν in R erzeugte Vollideal, das heißt, das kleinste Vollideal aus R, welches A_ν umfaßt. Es gilt dann:

(A_ν) ist die Menge aller Polynome

$$\sum_i u_i(\mathfrak{x}_k)\, a_i(\mathfrak{r}_{\nu i}(\mathfrak{x}_k)) \tag{2}$$

wobei $u_i(\mathfrak{x}_k) \in R$, $\mathfrak{r}_{\nu i}(\mathfrak{x}_k)$ ein ν-dimensionaler Vektor über R und $a_i(\mathfrak{x}_\nu) \in A_\nu$ ist.

Denn die Menge dieser Polynome ist ersichtlich ein Vollideal in R, welches A_ν umfaßt und in jedem Vollideal von R enthalten ist, das A_ν umfaßt.

Mit $\{A_\nu\}$ bezeichnen wir die Menge aller der Polynome $g(\mathfrak{x}_k) \in R$, für welche gilt

$$g(\mathfrak{r}_k(\mathfrak{x}_\nu)) \in A_\nu \text{ für jeden } k\text{-dimensionalen Vektor } \mathfrak{r}_k(\mathfrak{x}_\nu) \text{ über } R_\nu \tag{3}$$

Wie man ohne Mühe erkennt, ist $\{A_\nu\}$ Vollideal in R.

Wegen der Vollidealeigenschaft von A_ν gilt stets $A_\nu \subseteq \{A_\nu\}$, daher auch

$$(A_\nu) \subseteq \{A_\nu\}. \tag{4}$$

Wir werden später an Beispielen zeigen, daß in (4) sowohl das Gleichheits —, als auch das Kleinerzeichen gelten kann.

Da jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ Vollideal in $\mathfrak{r}$ ist, sind im Fall $\nu = 0$ die Symbole (A_0) und $\{A_0\}$ erklärt für jedes Ideal $A_0 \subseteq R_0$. Aus (2) ergibt sich, daß (A_0) die Menge aller jener Polynome aus R ist, deren sämtliche Koeffizienten zu A_0 gehören. Die Ideale (A_0) und $\{A_0\}$ haben wir schon in [7] bzw. [8] eingeführt und verwendet.

Wir haben nun folgenden

Satz 1: Ist A Vollideal in R, so gilt

$$(\vartheta_\nu A) \subseteq A \subseteq \{\vartheta_\nu A\} \text{ für } 0 \leqq \nu \leqq k \tag{5}$$

und außer $\vartheta_\nu A$ gibt es kein weiteres Vollideal in R_ν, welches (5) erfüllt.

Beweis: Aus $\vartheta_\nu A \subseteq A$ und daraus, daß A Vollideal in R ist, ergibt sich $(\vartheta_\nu A) \subseteq A$. Für $g(\mathfrak{x}_k) \in A$ haben wir stets $g(\mathfrak{r}_k(\mathfrak{x}_\nu)) \in A \cap R_\nu$, also gilt auch $A \subseteq \{\vartheta_\nu A\}$. Wenn für das Vollideal $B_\nu \subseteq R_\nu$ gilt $(B_\nu) \subseteq A \subseteq \{B_\nu\}$,

dann ist $B_\nu \subseteq (B_\nu) \subseteq A \subseteq \{\vartheta_\nu A\}$, also $B_\nu \subseteq \vartheta_\nu A$. Auf dieselbe Art erhält man $\vartheta_\nu A \subseteq B_\nu$, also gilt $B_\nu = \vartheta_\nu A$.

Wie wir schon in [8] festgestellt haben, ist in der von allen Idealen von R bezüglich der Operationen Summe, Durchschnitt und Produkt gebildeten Algebra die Menge der Vollideale eine Teilalgebra $\mathfrak{V}$, die wir als Algebra der Vollideale von R bezeichnen wollen. Es gilt dann

Satz 2: Die durch (1) *erklärte Abbildung ϑ_ν ist ein Homomorphismus der Algebra $\mathfrak{V}$ der Vollideale von R auf die Algebra $\mathfrak{V}_\nu$ der Vollideale von R_ν.*

Denn $\vartheta_\nu A$ ist ein eindeutig bestimmtes Vollideal in R_ν. Aus $(A_\nu) \subseteq (A_\nu) \subseteq \{A_\nu\} \subseteq \{A_\nu\}$ und Satz 1 erhalten wir

$$\vartheta_\nu(A_\nu) = \vartheta_\nu\{A_\nu\} = A_\nu \tag{6}$$

also tritt jedes Element von $\mathfrak{V}_\nu$ bei ϑ_ν als Bild auf. Die drei Gleichungen

$$\vartheta_\nu(A, B) = (\vartheta_\nu A, \vartheta_\nu B)$$

$$\vartheta_\nu(A \cap B) = \vartheta_\nu A \cap \vartheta_\nu B$$

$$\vartheta_\nu AB = (\vartheta_\nu A)(\vartheta_\nu B)$$

verifiziert man genau so wie beim Beweis von [7], Satz 5, von dem unser Satz ja die Verallgemeinerung ist.

Wir wollen uns nun, wie angekündigt, überlegen, daß in (4) sowohl das Kleiner —, als auch das Gleichheitszeichen gelten kann:

Ein Beispiel für das erstere liefert $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ (jetzt und im folgenden sei mit $\mathfrak{g}$ stets der Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen bezeichnet), $R = \mathfrak{g}[x_1]$ und $A_0 = (p)$, (p soll jetzt und auch später stets eine Primzahl bezeichnen). Wir haben dann nämlich

$$(A_0) = (p) \subseteq R \qquad \{A_0\} = (x_1^p - x_1, p)$$

also gilt $(A_0) \subset \{A_0\}$.

Ein nichttriviales Beispiel für das zweite erhält man folgendermaßen: Es sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ ein Galoisfeld mit $r = p^t$ Elementen (diese Bezeichnungen wollen wir auch für später beibehalten), $R = \mathfrak{k}[x_1, x_2 \ldots x_k]$, $A_1 = (x_1^{r'} - x_1)$ (daß A_1 Vollideal in R_1 ist, wurde in [5] bewiesen). Wir haben dann

$$(A_1) = (x_1^{r'} - x_1, x_2^{r'} - x_2 \ldots x_k^{r'} - x_k) \tag{7}$$

denn das rechtsstehende Ideal ist das zugehörige Ideal aus R zu der aus allen Punkten des affinen Raumes $A_k(\Omega)$ über das Erweiterungs-Galoisfeld Ω von $\mathfrak{k}$ mit r' Elementen bestehenden Varietät; dieses ist aber ersichtlich Vollideal in R und umfaßt daher (A_1), andererseits umfaßt (A_1) als Vollideal das rechtsstehende Ideal.

Wenn für $f(\mathfrak{x}_k) \in R$ gilt $f(\mathfrak{x}_k) \in \{A_1\}$, so haben wir

$$f(\mathfrak{x}_k(x_1)) \in A_1 \text{ für jeden Vektor } \mathfrak{x}_k(x_1)$$

also gilt, wenn ξ ein primitives Element von Ω ist:

$$f(\mathfrak{x}_k(\xi)) = 0 \text{ für jeden Vektor } \mathfrak{x}_k(\xi),$$

das heißt, $f(\mathfrak{x}_k)$ verschwindet in jedem Punkt von $A_k(\Omega)$, und wir haben wegen (7) und der darauf folgenden Bemerkung $f(\mathfrak{x}_k) \in (A_1)$, somit also $\{A_1\} \subseteqq (A_1)$, insgesamt also $(A_1) = \{A_1\}$.

Die Zuordnungen

$$A_\nu \to (A_\nu) \text{ und } A_\nu \to \{A_\nu\}$$

sind beide Abbildungen der Algebra $\mathfrak{V}_\nu$ der Vollideale von R_ν in die Algebra $\mathfrak{V}$ der Vollideale von R. Wir wollen über diese Abbildungen einige Aussagen machen:

1. Beide Abbildungen sind umkehrbar eindeutig. Denn sowohl aus $(A_\nu) = (B_\nu)$ als auch aus $\{A_\nu\} = \{B_\nu\}$ folgt durch Anwendung von ϑ_ν wegen (6) sogleich $A_\nu = B_\nu$.

2. Aus $A_\nu \subseteqq B_\nu$ folgt $(A_\nu) \subseteqq (B_\nu)$ und $\{A_\nu\} \subseteqq \{B_\nu\}$. Das ist unmittelbar einzusehen.

3. Es gilt

$$((A_\nu, B_\nu)) = ((A_\nu), (B_\nu)) \tag{8a}$$

$$\{(A_\nu, B_\nu)\} = (\{A_\nu\}, \{B_\nu\}) \tag{8b}$$

Aus 2. folgt nämlich in beiden Zeilen $\supseteqq$. Andererseits aber gilt $\vartheta_\nu((A_\nu), (B_\nu)) = (A_\nu, B_\nu)$ wegen Satz 2, daher gilt wegen Satz 1 in der ersten Zeile auch $\subseteqq$, also das Gleichheitszeichen.

4. Es gilt

$$(A_\nu \cap B_\nu) \subseteqq (A_\nu) \cap (B_\nu) \tag{9a}$$

$$\{A_\nu \cap B_\nu\} = \{A_\nu\} \cap \{B_\nu\} \tag{9b}$$

Denn 2. liefert in beiden Zeilen $\subseteqq$. Nach Satz 2 gilt aber doch $\vartheta_\nu(\{A_\nu\} \cap \{B_\nu\}) = A_\nu \cap B_\nu$, so daß wegen Satz 1 in der zweiten Zeile auch $\supseteqq$, also das Gleichheitszeichen gilt.

5. Es gilt

$$(A_\nu B_\nu) \subseteqq (A_\nu)(B_\nu) \tag{10a}$$

$$\{A_\nu\} \cap \{B_\nu\} \supseteqq \{A_\nu B_\nu\} \supseteqq \{A_\nu\}\{B_\nu\} \tag{10b}$$

Die erste Zeile und die zweite Beziehung der zweiten Zeile ergeben sich dadurch, daß man Satz 2 und Satz 1 in der selben Art anwendet wie bei 3. und 4. Die erste Beziehung der zweiten Zeile folgt aus 2.

Folgerung aus (10b): *Sind A_ν und B_ν teilerfremd, so gilt*

$$\{A_\nu B_\nu\} = \{A_\nu\}\{B_\nu\}.$$

Denn wenn A_ν und B_ν teilerfremd sind, dann sind auch $\{A_\nu\}$ und $\{B_\nu\}$ teilerfremd und daher gilt $\{A_\nu\} \cap \{B_\nu\} = \{A_\nu\}\{B_\nu\}$.

Summen und Produkte von Restpolynomidealen

Wir wollen nun die Beziehungen 8, 9, 10 im Spezialfall $\nu = 0$ noch näher untersuchen. Dabei werden wir die Ideale A_0 von $R_0 = \mathfrak{r}$ mit kleinen Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... bezeichnen.

Zunächst können wir, wenn wir die vor Satz 1 gemachte Bemerkung verwenden, sogleich sagen:

Für den Fall $\nu = 0$ gilt in den Beziehungen (9a) *und* (10a) *stets das Gleichheitszeichen.*

Wir wollen das Ideal $\{\mathfrak{a}\}$ in Übertragung der im Fall $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ üblichen Bezeichnungsweise — man vergleiche [2] — als das Restpolynomideal mod $\mathfrak{a}$ bezeichnen und fragen uns, inwieweit für $\nu = 0$ auch in den Beziehungen (8b) und (10b) das Gleichheitszeichen gilt.

Zunächst beweisen wir folgenden

Satz 3: Ist $\mathfrak{r}$ ein ZPI-Ring, so gilt für beliebiges k stets

$$\{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} = (\{\mathfrak{a}\}, \{\mathfrak{b}\}).$$

Unter einem *ZPI*-Ring (man vergleiche die Definition in [10]) verstehen wir dabei einen Integritätsbereich mit Einheitselement, der folgende Eigenschaften hat:

1. Jedes vom Nullideal und Einheitsideal verschiedene Ideal läßt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig darstellen als Produkt von endlich vielen vom Einheitsideal verschiedenen Primidealen.

2. Wenn für zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, so gibt es stets ein Ideal $\mathfrak{c}$, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$.

Beweis: Wegen (8b) braucht nur $\{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq (\{\mathfrak{a}\}, \{\mathfrak{b}\})$ nachgewiesen zu werden. Diese Beziehung gilt sicher dann, wenn das Kongruenzsystem

$$\left.\begin{aligned} y &\equiv 0 \mod \{\mathfrak{a}\} \\ y &\equiv g(\mathfrak{x}_k) \mod \{\mathfrak{b}\} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

für jedes $g(\mathfrak{x}_k) \in \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$ eine Lösung $y \in R$ besitzt.

Da die zu beweisende Inklusion sicher gilt, wenn eines der beiden Ideale das Nullideal oder das Einheitsideal ist, können wir voraussetzen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von diesen beiden Idealen verschieden sind. Es seien

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i} \qquad \mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{f_i}$$

die Primidealzerlegungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wobei alle Primfaktoren angeschrieben seien, die in $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ vorkommen, eventuell mit dem Exponenten 0. Es gilt dann

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{\min(e_i, f_i)} \tag{12}$$

Wir bestimmen nun für $i = 1, 2 \ldots r$ die Polynome $y_i \in R$ aus den Kongruenzsystemen

$$\left.\begin{aligned} y_i &\equiv 0 \mod \{\mathfrak{p}_i^{e_i}\} \\ y_i &\equiv g(\mathfrak{x}_k) \mod \{\mathfrak{p}_i^{f_i}\} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Diese Kongruenzsysteme sind stets lösbar; denn nach Voraussetzung gilt $g(\mathfrak{x}_k) \in \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$, wegen (12) folgt daraus $g(\mathfrak{x}_k) \equiv 0 \mod \{\mathfrak{p}_i^{\min(e_i, f_i)}\}$. Daraus ergibt sich, daß (13) im Falle $e_i \geqq f_i$ erfüllt wird durch $y_i = 0$, im Falle $e_i < f_i$ aber erfüllt wird durch $y_i = g(\mathfrak{x}_k)$.

Da die Ideale $\mathfrak{p}_i^{\max(e_i, f_i)}$ paarweise teilerfremd sind, gibt es in $\mathfrak{r}$ Elemente α_j für $j = 1, 2 \ldots r$, so daß gilt

$$\alpha_j \equiv \delta_{ji} \mod \mathfrak{p}_i^{\max(e_i, f_i)} \text{ für } i = 1, 2 \ldots r$$

Mit diesen Elementen bilden wir $y = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_j$, dann gilt

$$y \equiv \sum_{j=1}^{r} \delta_{ji} y_j \equiv y_i \mod \{\mathfrak{p}_i^{\max(e_i, f_i)}\}$$

und daraus ergibt sich:

$$y \equiv y_i \equiv 0 \mod \{\mathfrak{p}_i^{e_i}\}$$

$$y \equiv y_i \equiv g(\mathfrak{x}_k) \mod \{\mathfrak{p}_i^{f_i}\}$$

für $i = 1, 2 \ldots r$. Wegen (9b) erhalten wir daraus weiter

$$y \equiv 0 \mod \{\mathfrak{p}_1^{e_1} \cap \mathfrak{p}_2^{e_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{e_r}\}$$

$$y \equiv g(\mathfrak{x}_k) \mod \{\mathfrak{p}_1^{f_1} \cap \mathfrak{p}_2^{f_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{f_r}\}$$

da die $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ bzw. die $\mathfrak{p}_i^{f_i}$ paarweise teilerfremd sind, haben wir also

$$y \equiv 0 \mod \{\mathfrak{a}\}$$

$$y \equiv g(\mathfrak{x}_k) \mod \{\mathfrak{b}\}.$$

Aus Satz 3 ergibt sich sogleich: *Ist* $\mathfrak{r}$ *ein ZPI-Ring, dann ist die Summe zweier Restpolynomideale stets wieder ein solches.*

Satz 3 gilt insbesondere für jeden Hauptidealring, also auch für den Ring $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen.

Nun wollen wir für den Fall $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ und $R = \mathfrak{g}[x]$ das Produkt $\{(p^e)\}\{(p)\}$ untersuchen (wobei wir stets $e > 0$ voraussetzen). Dazu benötigen wir eine Basis für $\{(p^e)\}$. Diese erhalten wir aus folgendem Hilfssatz 3 von [6]:

Jedes Polynom $f(x) \in \{(p^e)\}$ vom Grad n hat die Gestalt:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, p^{e-\varepsilon(i)}\, r_i(x) \tag{14}$$

Dabei ist $r_0(x) = 1$, $r_{i+1}(x) = (x-i)\, r_i(x)$ für $i = 0, 1, 2 \ldots$ $\varepsilon(i)$ ist der Exponent, zu dem p in der Primfaktorzerlegung von $i!$ vorkommt. Falls $\varepsilon(i) > e$ ausfällt, ist dabei in (14) *zu setzen $p^{e-\varepsilon(i)} = 1$. Die c_i schließlich sind ganze Zahlen. Umgekehrt gehört jedes Polynom der Gestalt* (14) *zu $\{(p^e)\}$.*

Wir erhalten aus diesem Hilfssatz ohne Mühe: Ist s die größte nichtnegative ganze Zahl, für welche gilt $\varepsilon(sp) < e$, so haben wir[1]:

$$\{(p^e)\} = (p^e\, r_0(x),\ p^{e-\varepsilon(p)}\, r_p(x),\ p^{e-\varepsilon(2p)}\, r_{2p}(x) \ldots p^{e-\varepsilon(sp)}\, r_{sp}(x),\ r_{(s+1)p}(x)) \tag{15}$$

Insbesondere haben wir also:

$$\{(p)\} = (p,\ r_p(x)) \tag{16a}$$

wegen

$$\frac{r_{(s+2)p}(x)}{r_{(s+1)p}(x)} = \prod_{\nu=(s+1)p}^{(s+2)p-1} (x-\nu) = r_p(x) + p\, h(x)$$

können wir aber auch schreiben

$$\{(p)\} = (p,\ \frac{r_{(s+2)p}(x)}{r_{(s+1)p}(x)}) \tag{16b}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Es ist $\varepsilon((s+1)\, p) = e$:

In diesem Fall haben wir nach (15)

$$\{(p^{e+1})\} = (p^{e+1}\, r_0(x),\ p^{e+1-\varepsilon(p)}\, r_p(x) \ldots p^{e+1-\varepsilon((s+1)p)}\, r_{(s+1)p}(x),\ r_{(s+2)p}(x))$$

und Multiplikation der Basen (15) und (16b) zeigt sogleich, daß gilt $\{(p^e)\}\{(p)\} \supseteq \{(p^{e+1})\}$, zusammen mit (10b) ergibt dies

[1] Eine andere Basis für $\{(p^e)\}$ und allgemeiner für $\{\mathfrak{p}^e\}$ — wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal im Ring $\mathfrak{r}$ ist, der gewisse Voraussetzungen erfüllen muß — gibt *Lewis* in [4]. Diese Basis ist aber für unsere Zwecke nicht geeignet.

$$\{(p^e)\}\{(p)\} = \{(p^{e+1})\} \tag{17}$$

b) Es ist $\varepsilon((s+1)p) > e$:

Nach (15) haben wir jetzt

$$\{(p^{e+1})\} = (p^{e+1} r_0(x),\ p^{e+1-\varepsilon(p)} r_p(x) \ldots p^{e+1-\varepsilon(sp)} r_{sp}(x),\ r_{(s+1)p}(x))$$

Würde auch in diesem Falle (17) gelten, so hätten wir insbesondere

$$r_{(s+1)p}(x) \in \{(p^e)\}\{(p)\}$$

wir könnten also $r_{(s+1)p}(x)$ durch die Basis für $\{(p^e)\}\{(p)\}$ ausdrücken, die sich durch Multiplikation von (15) mit (16a) ergibt. Es wäre also

$$r_{(s+1)p}(x) = \sum_{\nu=0}^{s} (u_\nu(x)\, p^{e+1-\varepsilon(\nu p)}\, r_{\nu p}(x) + v_\nu(x)\, p^{e-\varepsilon(\nu p)}\, r_{\nu p}(x)\, r_p(x)) +$$
$$+ u_{s+1}(x)\, p\, r_{(s+1)p}(x) + v_{s+1}(x)\, r_{(s+1)p}(x)\, r_p(x)$$

und daher

$$r_{(s+1)p}(x) \equiv v_{s+1}(x)\, r_{(s+1)p}(x)\, r_p(x) \bmod (p)$$

Daraus würde durch Koeffizientenvergleich folgen $v_{s+1}(x) \equiv 0 \bmod (p)$, also $r_{(s+1)p}(x) \equiv 0 \bmod (p)$, was aber nicht der Fall ist.

Es gilt also

$$\{(p^e)\}\{(p)\} \subset \{(p^{e+1})\} \tag{18}$$

Da $\varepsilon(\nu p)$ als Funktion von ν streng monoton wachsend ist, tritt der Fall b) genau dann ein, wenn $\varepsilon(\nu p) = e$ unlösbar ist. Wir haben also folgenden

Satz 4: *Im Polynomring* $\mathfrak{g}[x]$ *gilt* $\{(p^e)\}\{(p)\} \subset \{(p^{e+1})\}$ *genau dann, wenn die Gleichung* $\varepsilon(\nu p) = e$ *unlösbar ist.*

Der kleinste Exponent e, für den (18) gilt, ist also ersichtlich $e = p$. Nach Satz 2 hat $\{(p^e)\}\{(p)\}$ das Umschließungsideal $\{(p^{e+1})\}$ und kann daher im Falle b) nicht Restpolynomideal sein, so daß wir also sagen können: *Im Polynomring* $\mathfrak{g}[x]$ *ist das Produkt zweier Restpolynomideale nicht immer Restpolynomideal.*

D-Vollideale

Wir wollen uns nun beschäftigen mit einer speziellen Klasse von Vollidealen von R. Wir definieren:

Unter einem D-Vollideal von R *verstehen wir ein Vollideal* $A \subseteq R$, *für welches gilt* $A' = A$.

Dabei ist A' die in I eingeführte Ableitung von A.

Zunächst wollen wir uns überlegen, welche Bedeutung die D-Vollideale für R haben. Wir können R auffassen als eine Algebra mit den

beiden zweistelligen Operationen Addition und Multiplikation, der $k+1$-stelligen Operation Einsetzen und den k einstelligen Operationen $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots k)$, also als eine Algebra vom Typ $\langle 2, 2, k+1, 1, 1 \ldots 1\rangle$. Wir bezeichnen das auf diese Art gedeutete R als R_a, während R wie bisher den Ring bedeuten soll. (Wir übernehmen die Terminologie der allgemeinen Algebrentheorie von [3]). Jedes homomorphe Bild von R_a ist isomorph zu einer Restklassenalgebra von R_a modulo einer Kongruenzrelation ϑ in R_a. Um alle homomorphen Bilder von R_a zu erhalten, muß man also alle Kongruenzrelationen ϑ bestimmen. Wir benützen dazu eine abgekürzte Form des in [7] für ein ähnliches Problem verwendeten Gedankenganges:

Sei ϑ eine Kongruenzrelation in R_a. Dann folgt zunächst aus $f_1 \vartheta g_1$ und $f_2 \vartheta g_2$, daß auch $(f_1 + f_2) \vartheta (g_1 + g_2)$ und $f_1 f_2 \vartheta g_1 g_2$. Die Menge A aller $f \in R_a$ mit $f \vartheta 0$ bildet daher ein Ideal $A \subseteqq R$ und es ist $f \vartheta g$ gleichbedeutend mit $f \equiv g \bmod A$. Weiter folgt aus $f \vartheta g$ und $u_\nu \vartheta v_\nu$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$ wegen der Kongruenzeigenschaften

$$f(u_1, u_2 \ldots u_k) \vartheta g(v_1, v_2 \ldots v_k)$$

insbesondere aus $f \vartheta 0$ also $f(u_1, u_2 \ldots u_k) \vartheta 0$, das heißt:

Aus $f(\mathfrak{x}_k) \equiv 0 \bmod A$ folgt $f(u_1, u_2 \ldots u_k) \equiv 0 \bmod A$, also ist A Vollideal in R. Schließlich folgt aus $f \vartheta g$, daß $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \vartheta \frac{\partial g}{\partial x_\nu}$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$, insbesondere aus $f \vartheta 0$ also $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \vartheta 0$, das heißt:

Aus $f(\mathfrak{x}_k) \equiv 0 \bmod A$ folgt $\frac{\partial f(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} \equiv 0 \bmod A$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$, wir haben also $A' = A$, das heißt, A ist ein D-Vollideal in R.

Nun sei umgekehrt A ein D-Vollideal in R und die Äquivalenzrelation ϑ in R_a erklärt durch $f \vartheta g \leftrightarrow f \equiv g \bmod A$. Klarerweise ist ϑ bezüglich der Addition und Multiplikation in R_a eine Kongruenzrelation; aus $f \vartheta g$ und $u_\nu \vartheta v_\nu$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$ folgt $f \equiv g \bmod A$ und $u_\nu \equiv v_\nu \bmod A$ und daraus weiter

$$f(u_1, u_2 \ldots u_k) \equiv g(u_1, u_2 \ldots u_k) \equiv g(v_1, v_2 \ldots v_k) \bmod A$$

also $f(u_1, u_2 \ldots u_k) \vartheta g(v_1, v_2 \ldots v_k)$. Schließlich folgt aus $f \vartheta g$ über $f \equiv g \bmod A$ und $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial g}{\partial x_\nu} \bmod A$, daß $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \vartheta \frac{\partial g}{\partial x_\nu}$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$, also ist ϑ eine Kongruenzrelation in R_a.

Wir haben also folgenden

Satz 5: Die Kongruenzrelationen der Algebra R_a sind genau die Kongruenzrelationen des Ringes R nach den D-Vollidealen $A \subseteqq R$. Man erhält also bis auf Isomorphie alle homomorphen Bilder der Algebra R_a, wenn man sämtliche Restklassenringe nach den D-Vollidealen des Ringes R bildet und auf sie die Operation Einsetzen und die k Operationen $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ überträgt.

Nun wollen wir das Verhalten der D-Vollideale von R in der Algebra $\mathfrak{V}$ aller Vollideale von R etwas näher untersuchen. Zunächst gilt

Satz 6: In der Algebra $\mathfrak{V}$ der Vollideale von R bildet die Menge aller D-Vollideale eine Teilalgebra $\mathfrak{W}$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß Summe, Durchschnitt und Produkt von zwei D-Vollidealen A, B wieder ein D-Vollideal sind.

a) Sei $f(\mathfrak{x}_k) \in (A, B)$, dann gilt

$$f(\mathfrak{x}_k) = a(\mathfrak{x}_k) + b(\mathfrak{x}_k) \text{ mit } a(\mathfrak{x}_k) \in A,\ b(\mathfrak{x}_k) \in B.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial f(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} = \frac{\partial a(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial b(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} \in (A, B)$$

also $(A, B)' = (A, B)$.

b) Nach I gilt $(A \cap B)' = A' \cap B' = A \cap B$.

c) Sei $f(\mathfrak{x}_k) \in AB$, dann haben wir

$$f(\mathfrak{x}_k) = \Sigma\, a_i(\mathfrak{x}_k)\, b_i(\mathfrak{x}_k) \text{ mit } a_i(\mathfrak{x}_k) \in A,\ b_i(\mathfrak{x}_k) \in B,$$

daraus ergibt sich

$$\frac{\partial f(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} = \Sigma \frac{\partial a_i(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} b_i(\mathfrak{x}_k) + \Sigma\, a_i(\mathfrak{x}_k) \frac{\partial b_i(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_\nu} \in AB$$

also $(AB)' = AB$.

Wir beweisen nun

Satz 7: Bei dem durch (1) erklärten Homomorphismus ϑ_ν der Algebra $\mathfrak{V}$ der Vollideale von R auf die Algebra $\mathfrak{V}_\nu$ der Vollideale von R_ν wird die Teilalgebra $\mathfrak{W}$ der D-Vollideale von R abgebildet auf die Teilalgebra $\mathfrak{W}_\nu$ der D-Vollideale von R_ν.

Zunächst erkennt man nämlich sogleich: Ist A ein D-Vollideal in R, dann ist $\vartheta_\nu A$ ein D-Vollideal in R_ν und somit $\vartheta_\nu \mathfrak{W} \subseteqq \mathfrak{W}_\nu$.

Nun sei A_ν ein D-Vollideal in R_ν. Wir wollen zeigen, daß dann (A_ν) ein D-Vollideal in R ist. Wir haben nach (2) für $f(\mathfrak{x}_k) \in (A_\nu)$

$$f(\mathfrak{x}_k) = \sum_i u_i(\mathfrak{x}_k)\, a_i(r_{1i}(\mathfrak{x}_k), r_{2i}(\mathfrak{x}_k) \dots r_{\nu i}(\mathfrak{x}_k))$$

mit $u_i(\mathfrak{x}_k)$ und $r_{mi}(\mathfrak{x}_k)$ aus R und $a_i(\mathfrak{x}_\nu) \in A_\nu$.

Daraus folgt

$$\frac{\partial f(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q} = \sum_i \frac{\partial u_i(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q} a_i(r_{1i}(\mathfrak{x}_k), r_{2i}(\mathfrak{x}_k) \dots r_{\nu i}(\mathfrak{x}_k)) +$$

$$+ \sum_i u_i(\mathfrak{x}_k) \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} (r_{1i}(\mathfrak{x}_k), r_{2i}(\mathfrak{x}_k) \dots r_{\nu i}(\mathfrak{x}_k)) \frac{\partial r_{mi}(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial u_i(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q} a_i(\mathfrak{r}_{\nu i}(\mathfrak{x}_k)) + \sum_{i,m} (u_i(\mathfrak{x}_k) \frac{\partial r_{mi}(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q}) \frac{\partial a_i}{\partial x_m} (\mathfrak{r}_{\nu i}(\mathfrak{x}_k))$$

wegen $\frac{\partial a_i}{\partial x_m}(\mathfrak{x}_\nu) \in A_\nu$ gilt also $\frac{\partial f(\mathfrak{x}_k)}{\partial x_q} \in (A_\nu)$, das heißt also, es ist $(A_\nu)' = (A_\nu)$ und somit (A_ν) ein D-Vollideal.

Wegen $\vartheta_\nu(A_\nu) = A_\nu$ gilt also $\vartheta_\nu \mathfrak{W} = \mathfrak{W}_\nu$ w.z.z.w.

Wir können aus dem zweiten Teil des soeben geführten Beweises folgendes entnehmen: Da in $R_0 = \mathfrak{r}$ jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in trivialer Weise ein D-Vollideal ist, ist ein Ideal $(\mathfrak{a}) \subseteqq R$ stets D-Vollideal von R. Man erhält daher aus dem Beweis von I, Satz 2 sofort einen Beweis für folgenden

Satz 8: Ist V ein D-Vollideal in R, dessen Umschließungsideal $\mathfrak{v}$ Produkt der teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist, dann läßt sich V darstellen als Produkt eines D-Vollideales A mit Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ und eines D-Vollideales B mit Umschließungsideal $\mathfrak{b}$.

Wir definieren nun: *Unter dem D-Kern des Vollideales A verstehen wir das D-Vollideal:*

$$\delta A = A \cap A' \cap A'' \cap \dots \tag{19}$$

Daß δA wirklich ein D-Vollideal ist, wurde schon in I bewiesen. Wegen $(A \cap B)' = A' \cap B'$ haben wir

$$\delta(A \cap B) = \delta A \cap \delta B \tag{20}$$

Sehr leicht erhält man den Beweis von folgendem

Satz 9: Für jedes im Vollideal A enthaltene D-Vollideal D gilt $D \subseteqq \delta A$.

Denn aus $D \subseteqq A$ ergibt sich nach I wegen $D' = D$ durch fortgesetztes Differenzieren

$$D \subseteqq A',\ D \subseteqq A'' \dots$$

also

$$D \subseteqq \delta A.$$

Aus Satz 9 zusammen mit Satz 1 ergibt sich sogleich

Satz 10: Für jedes D-Vollideal A von R gilt

$$(\vartheta, A) \subseteq A \subseteq \delta\{\vartheta, A\} \tag{21}$$

Wir wollen unsere Ergebnisse über D-Vollideale nun an zwei Beispielen anwenden:

a) In der Bezeichnungsweise des ersten Abschnittes dieser Arbeit sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$. Wir wollen sämtliche D-Vollideale von $R = \mathfrak{k}[x]$ bestimmen:

Nach *Milgram* [5] ist die Gesamtheit der Vollideale von R gegeben durch jene Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Idealen der Gestalt $((x^{r^n} - x)^m)$. Da jedes D-Vollideal der D-Kern von sich selbst ist, erhält man jedenfalls alle D-Vollideale von R, wenn man die D-Kerne aller Vollideale von R bildet. Die Gesamtheit aller D-Vollideale ist wegen (20) also gegeben durch jene Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Idealen der Gestalt $\delta((x^{r^n} - x)^m)$.

Wenn nun gilt

$$A = ((x^{r^n} - x)^m) \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } m \neq 0,$$

so gilt für jedes $w(x) \in A$

$$w(x) = f(x)\,(x^{r^n} - x)^m$$

und daher

$$w'(x) = f'(x)\,(x^{r^n} - x)^m - m\,f(x)\,(x^{r^n} - x)^{m-1} \equiv -m\,f(x)\,(x^{r^n} - x)^{m-1} \bmod A.$$

Also gilt $w'(x) \in A$ für $m \equiv 0 \bmod p$ immer, für $m \not\equiv 0 \bmod p$ genau dann, wenn $f(x)$ durch $x^{r^n} - x$ teilbar ist. Wir haben also:

$$A' = \begin{cases} ((x^{r^n} - x)^m) & \text{für } m \equiv 0 \bmod p \\ ((x^{r^n} - x)^{m+1}) & \text{für } m \not\equiv 0 \bmod p \end{cases} \tag{22}$$

(22) gilt ersichtlich auch für $n = 0$ und für $m = 0$.

Aus (22) folgt sogleich, daß die Gesamtheit der Ideale $\delta((x^{r^n} - x)^m)$ gegeben ist durch die Ideale $((x^{r^n} - x)^{kp})$ mit $k \geqq 0$, und somit haben wir:

Die Gesamtheit der D-Vollideale des Polynomringes $\mathfrak{k}[x]$ über das Galoisfeld $\mathfrak{k}$ mit r Elementen ist gegeben durch jene Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Idealen der Gestalt $((x^{r^n} - x)^{kp})$ mit $k \geqq 0$.

Da der Durchschnitt von Idealen in einem Hauptidealring erzeugt wird durch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches der die einzelnen Ideale

erzeugenden Elemente, können wir dieses Ergebnis auch so formulieren:

Ein Ideal von $\mathfrak{k}[x]$ ist genau dann ein D-Vollideal, wenn es sich darstellen läßt als p-te Potenz eines Vollideals.

Für den Fall, daß $\mathfrak{k}$ Primkörper ist, hat *Burke* [1], von einer etwas anderen Problemstellung ausgehend, dasselbe Ergebnis erhalten.

b) Nun sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ und $R = \mathfrak{g}[x]$. Wir wollen alle D-Vollideale von R mit dem Umschließungsideal (p) bestimmen und gehen dazu ähnlich vor wie im Falle a: Wie wir in I gesehen haben, ist die Gesamtheit aller Vollideale von R mit Umschließungsideal (p) gegeben durch die Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt von endlich vielen Idealen der Gestalt $((x^{p^n} - x)^m, p)$ mit $m > 0$. Nach I hat δA stets das gleiche Umschließungsideal wie A, wegen (20) ist die Gesamtheit der gesuchten Ideale also gegeben durch jene Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt von endlich vielen Idealen der Gestalt $\delta((x^{p^n} - x)^m, p)$ mit $m > 0$. Diese Ideale sind nach der in I abgeleiteten Formel

$$((x^{p^n} - x)^m, p)' = \begin{cases} ((x^{p^n} - x)^m, p) & \text{für } m \equiv 0 \bmod p \\ ((x^{p^n} - x)^{m+1}, p) & \text{für } m \not\equiv 0 \bmod p \end{cases}$$

gerade die Ideale $((x^{p^n} - x)^{kp}, p)$ mit $k > 0$. Wir haben also:

Die Gesamtheit der D-Vollideale des Polynomringes $\mathfrak{g}[x]$ über den Ring $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen, deren Umschließungsideal durch die Primzahl p erzeugt wird, ist gegeben durch jene Ideale, welche sich darstellen lassen als Durchschnitt von endlich vielen Idealen von der Gestalt $((x^{p^n} - x)^{kp}, p)$ mit $k > 0$.

Literatur

[1] *Burke J. C.*: Remarks concerning tri-operational algebra. Reports Math. Colloquium (2) **7**, 68—72 (1946).

[2] *Dickson L. E.* — *Bodewig E.*: Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig und Berlin 1931.

[3] *Hermes H.*: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg. 1955.

[4] *Lewis D. J.*: Ideals and polynomial functions. Amer. J. Math. **78**, 71—77 (1956).

[5] *Milgram A. N.*: Saturated Polynomials. Reports Math. Colloquium (2) **7**, 65—67 (1946).

[6] *Nöbauer W.*: Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **162**, 207—233 (1953).

[7] *Nöbauer W.*: Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen. Math. Ann. **134**, 248—259 (1958).

[8] *Nöbauer W.*: Die Operation des Einsetzens bei Polynomen in mehreren Unbestimmten. J. reine angew. Math. **201**, 207—220 (1959).

[9] *Nöbauer W.*: Zur Theorie der Vollideale. Monatsh. Math. **64**, 176—183 (1960).

[10] *Pickert G.*: Einführung in die Höhere Algebra. Göttingen 1951.

Zur Eulerschen Charakteristik euklidischer Polyeder*

Von

H. Hadwiger, Bern

(Eingegangen am 12. Januar 1960)

Es bezeichne E^k den k-dimensionalen euklidischen Raum. Punkte $x \in E^k$ kennzeichnen wir mit der Anschrift $x = \langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle$ durch die k Koordinaten ξ_i bezüglich eines festen kartesischen Systems. Eine Translation $t \in \Gamma$ der Translationsgruppe Γ in E^k ist mit $t = \langle \tau_1, \ldots, \tau_k \rangle$ durch die k skalaren Komponenten τ_i gekennzeichnet, und sie führt den Punkt x in den Bildpunkt $tx = \langle \xi_1 + \tau_1, \ldots \xi_k + \tau_k \rangle$ über. Mit $f = f(x)$ bezeichnen wir eine im E^k definierte reellwertige Funktion. Insbesondere sollen 0 bzw. 1 die Funktionen darstellen, die im ganzen Raum identisch verschwinden bzw. indentisch gleich Eins sind, falls aus dem Zusammenhang ersichtlich wird, daß die angeführten Zeichen Funktionen bezeichnen. Durch eine Translation $t \in \Gamma$ wird eine Funktion $f = f(x)$ in die Bildfunktion $tf = f(tx)$ übergeführt. — Weiter bedeute $\mathfrak{P}$ die Klasse der beschränkten und abgeschlossenen euklidischen Polyeder des E^k. Für ein Polyeder $P \in \mathfrak{P}$ sei $p = p(x) = h(P; x)$ die charakteristische Funktion der Punktmenge P, d. h. es gelte $p(x) = 0$ bzw. $1 (x \notin P$ bzw. $x \in P)$. Besonders ausgezeichnet ist die charakteristische Funktion $w = w(x) = h(W; x)$ des Einheitswürfels

$$W = \{x \mid 0 \leq \xi_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

I.

Ein invariantes Halbintegral im E^k ist eine über einer linearen Funktionenklasse $\mathfrak{F}$ definierte reellwertige und invariante Linearform φ. Genauer: Es sei $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_k$ eine Klasse von reellwertigen im E^k definierten Funktionen, welche die drei Eigenschaften

$$f \in \mathfrak{F} \triangleright tf \in \mathfrak{F}\ [t \in \Gamma] \tag{1}$$

* Vortrag, gehalten an der Geometrie-Tagung in Oberwolfach im Oktober 1959.

$$f, g \in \mathfrak{F} \triangleright \alpha f + \beta g \in \mathfrak{F} \; [\alpha, \beta \text{ reell}] \tag{2}$$

$$w \in \mathfrak{F} \tag{3}$$

aufweist, also translationsfrei, linear und normal ist. Über $\mathfrak{F}$ sei eine reellwertige Funktion φ so definiert, daß die drei Bedingungen

$$\varphi f = \varphi t f \; [t \in \Gamma] \tag{4}$$

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi f + \beta \varphi g \quad [\alpha, \beta \text{ reell}] \tag{5}$$

$$\varphi w = 1 \tag{6}$$

erfüllt werden, so daß also φ ein translationsinvariantes, lineares und normiertes Funktional ist.

Das hier in Betracht gezogene Halbintegral hat demnach bis auf die nicht geforderte Monotonieeigenschaft $\varphi f \leq \varphi g$ $[f \leq g]$ alle charakteristischen Eigenschaften eines Integrals.

II.

Wir weisen die Existenz eines invarianten Halbintegrals im E^k nach, das zusätzlich die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

Ist $p = h(P; x)$ die charakteristische Funktion eines beliebigen Polyeders $P \in \mathfrak{P}$, so gilt

$$p \in \mathfrak{F} \tag{7}$$

$$\varphi p = \chi(P), \tag{8}$$

wobei χ die Charakteristik von Euler-Poincaré bezeichnet.

III.

Nun konstruieren wir das in Aussicht gestellte Halbintegrationssystem $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$. Bedeutet $c = c(x) = h(C; x)$ die charakteristische Funktion eines konvexen Polyeders $C \in \mathfrak{P}$, so sei das Feld $\mathfrak{F}$ durch den Ansatz

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_k = \{f \mid f = \Sigma \lambda_\nu c_\nu, \; \lambda_\nu \text{ reell}\} \tag{9}$$

gegeben, umfaßt also alle Funktionen, die sich als endliche lineare Kombinationen charakteristischer Funktionen konvexer Polyeder darstellen lassen. $\mathfrak{F}$ ist also die kleinste lineare Funktionenklasse über den Funktionen c.

Die Konstruktion des linearen Funktionals φ vorbereitend, definieren wir zunächst einen Projektionsoperator σ_k wie folgt: Ist $f \in \mathfrak{F}_k$ und wird $\tilde{f}(\xi) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi)$ gesetzt, wobei also die ξ_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ fest gedacht sind und lediglich $\xi = \xi_k$ variabel angenommen wird, so

gilt $\tilde{f} \in \mathfrak{F}_1$, wenn $\tilde{f}$ als Funktion im E^1 interpretiert wird und E^1 die durch $\xi_k = \xi\ (-\infty < \xi < \infty)$, ξ_i fest $(i = 1, \ldots, k-1)$ gekennzeichnete Gerade des E^k bedeutet. In der Tat: Gilt $f = \Sigma \lambda_\nu c_\nu$ $[c_\nu = h(C_\nu; x)]$, so ist offensichtlich $\tilde{f} = \Sigma \lambda_\nu \tilde{c}_\nu$ $[\tilde{c}_\nu = h(C_\nu \cap E^1; x)]$. Bezeichnet $f(\xi + 0)$ den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle ξ, so existiert die über alle ξ erstreckte Summe

$$f^1 = f^1(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = \Sigma \{\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi + 0)\},$$

da der Summand nur an endlich vielen ξ-Stellen nicht verschwindet. Wie angedeutet ist f^1 eine Funktion des E^{k-1}, und als solche gilt $f^1 \in \mathfrak{F}_{k-1}$. Zunächst gilt nämlich für $c = h(C; x)$ — wie man sich mühelos überlegt — $c^1 = h(C^1; x)$, wo C^1 den Normalriß des konvexen Körpers C im E^k auf den durch die Gleichung $\xi_k = 0$ gekennzeichneten Unterraum E^{k-1} darstellt. Ist demnach $f = \Sigma \lambda_\nu c_\nu$, so resultiert $f^1 = \Sigma \lambda_\nu c_\nu^1$. Setzen wir $f^1 = \sigma_k f$, so erscheint σ_k als linearer Operator, der eine Funktion $f \in \mathfrak{F}_k$ in $f^1 \in \mathfrak{F}_{k-1}$ transformiert. Durch die mögliche sinngemäß angesetzte Interation gewinnt man die rekursive Funktionenfolge $f^0 = f$, $f^{i+1} = \sigma_{k-i} f^i$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ wobei $f^i \in F_{k-i}$ gilt. Das Schlußglied $f^k \in \mathfrak{F}_0$ ist offensichtlich eine reelle Zahl. Nun definieren wir die Linearform φ durch den Ansatz

$$\varphi f = \varphi_k f = f^k = \sigma_1 \ldots \sigma_k f \tag{10}$$

Für die charakteristische Funktion c eines nichtleeren konvexen Polyeders gilt offenbar

$$\varphi c = 1. \tag{11}$$

Leicht sind jetzt die Eigenschaften (1) bis (6) zu verifizieren, so daß also φ ein (im oben erörterten Sinn) invariantes Halbintegral im E^k darstellt.

IV.

Zunächst erwähnen wir weitere Eigenschaften des soeben konstruierten Systems $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$, die sich unmittelbar an die Konstruktion anschließen lassen. Ist $f \in \mathfrak{F}_k$ vorgegeben, so kann vorerst $f = f(\eta_1, \ldots, \eta_{k-i}, \zeta_1, \ldots, \zeta_i)$ angeschrieben werden, wobei wir die η_i fest annehmen und $\tilde{f} = f$ als Funktion der Veränderlichen ζ_j auffassen. Als solche gilt $\tilde{f} \in \mathfrak{F}_i$, und es läßt sich das Halbintegral $\varphi_i \tilde{f}$ bilden. Dieses erscheint jetzt als Funktion $\tilde{\tilde{f}} = \varphi_i \tilde{f}$ der η_j und als solche gilt $\tilde{\tilde{f}} \in \mathfrak{F}_{k-i}$, so daß sich auch $\varphi_{k-i} \tilde{\tilde{f}}$ ermitteln läßt. Aus den Definitionen folgt leicht,

daß sich hierbei $\varphi f = \varphi_k f$ ergeben muß. Zusammengefaßt schreiben wir etwas gekürzt als

$$\varphi f = \varphi_k f = \varphi_{k-i}\varphi_i f, \tag{12}$$

also als Formel vom Typ des Fubinischen Theorems bei Mehrfachintegralen. Weiter ergibt sich mit der Linearität von φ ohne weiteres

$$\varphi f = \Sigma \lambda_\nu [f = \Sigma \lambda_\nu c_\nu]. \tag{13}$$

Diese einfache Relation ist von Bedeutung, denn sie gestattet folgendes abzulesen:

Der Wert des Halbintegrals φf ist für $f \in \mathfrak{F}$ vom individuell gewählten Koordinatensystem unabhängig, und die Koeffizientensumme $\Sigma \lambda_\nu$ muß bei verschiedenen Darstellungen von f stets den nämlichen Wert haben.

Damit ist auch die Einsicht verbunden, daß das Halbintegral φ eine weit über die mit (4) ausgedrückte Translationsinvarianz hinausreichende Invarianzeigenschaft aufweist. Ersetzt man die Gruppe Γ der Translationen t durch die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ der affinen Abbildungen $\tilde{t}$, so gilt an Stelle von (4) sogar

$$\varphi f = \varphi \tilde{t} f. \tag{14}$$

V.

Es ist nachfolgend zu zeigen, daß unser System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ die angekündigten Eigenschaften (7) und (8) besitzt. Vorbereitend stellen wir über Polyeder und ihre charakteristischen Funktionen einige nützliche Betrachtungen an. Ein Polyeder $P \in \mathfrak{P}$ läßt sich als Vereinigungsmenge endlich vieler konvexer Polyeder C darstellen, d. h. es besteht die Beziehung

$$P = U_1^n C_\nu. \tag{15}$$

Verfolgt man diese Erzeugung von P schrittweise, setzt man also $P^m = U_1^m C_\nu$; $P^0 = 0$; $P^n = P$, so ergibt sich für die charakteristischen Funktionen $p_m = h(P^m; x)$; $p_0 = 0$; $p_n = p$ die Rekursion $p_{m+1} = p_m + (1 - p_m)\, c_{m+1}$ $(m = 0, \ldots, n-1)$, die uns dazu dient, auf rein algebraischem Wege die beiden Darstellungen

$$p = \Sigma_1^n (1 - p_{\nu-1})\, c_\nu \tag{16}$$

$$p = 1 - \Pi_1^n (1 - c_\nu) \tag{17}$$

zu gewinnen. Die Entwicklung des oben rechts stehenden Produkts liefert weiter

$$p = \Sigma^1 c_{\nu_1} - \Sigma^2 c_{\nu_1} c_{\nu_2} + \Sigma^3 c_{\nu_1} c_{\nu_2} c_{\nu_3} - \ldots, \tag{18}$$

wobei sich die Summation Σ^i über alle Indizeskombinationen zur i-ten Klasse der Indizesmenge $1, \ldots, n$ zu erstrecken hat. Setzen wir noch $c_{\nu_1, \ldots, \nu_i} = c_{\nu_1} \ldots c_{\nu_i} = h(C_{\nu_1} \cap \ldots \cap C_{\nu_i}; x)$, so kann auch

$$p = \Sigma^1 c_{\nu_1} - \Sigma^2 c_{\nu_1 \nu_2} + \Sigma^3 c_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} - \ldots \tag{19}$$

geschrieben werden. Hieraus läßt sich die Richtigkeit von (7) ablesen, wonach $p \in \mathfrak{F}_k$ gilt. Durch Halbintegration von (18) resultiert weiter

$$\varphi p = m_1 - m_2 + m_3 - 0 \ldots, \tag{20}$$

wo m_i die Anzahl der Indizeskombinationen zur i-ten Klasse bezeichnet, für welche die Durchschnitte $C_{\nu_1} \cap \ldots \cap C_{\nu_i}$ nichtleer ausfallen. Aus unserem Zusammenhang geht jetzt hervor, daß die in (20) rechts stehende alternierende Summe der Anzahlen m_i von der individuell gewählten Darstellung (15) unabhängig ist und eine dem Polyeder P invariant zugeordnete ganze Zahl $\chi(P)$ repräsentiert. Wie von anderer Seite her bekannt ist, stellt diese Zahl die Charakteristik des Nervs der Überdeckung des Polyeders P gemäß (15) dar und ist nach geläufigen Sätzen identisch mit der Charakteristik von Euler-Poincaré. Damit ist (8) bestätigt, wonach $\varphi p = \chi(P)$ gilt.

VI.

Wir lassen nun einige einfache Formeln und Sätze über die Charakteristik der Polyeder folgen, die sich unmittelbar durch Halbintegrationen im Rahmen unseres Systems gewinnen lassen. Ist C^i $(0 \leq i \leq k)$ ein konvexes Polyeder des E^k, das in einem i-dimensionalen Teilraum E^i von E^k liegt und bezüglich E^i eigentlich ist, d. h. i-dimensionale innere Punkte aufweist, und ist S^{i-1} das $(i-1)$-dimensionale Randpolyeder von C^i, wo verabredet sei, daß S^{-1} die leere Menge 0 bedeuten soll, so ergeben sich die Formeln

$$\chi(C^i) = 1; \ \chi(S^{i-1}) = 1 - (-1)^i. \tag{21}$$

Sind P, Q zwei Polyeder, so besteht für ihre charakteristischen Funktionen die Beziehung

$$h(P; x) + h(Q; x) = h(P \cup Q; x) + h(P \cap Q; x),$$

und durch φ-Integration ergibt sich der Additionssatz für die Eulersche Charakteristik, nämlich

$$\chi(P) + \chi(Q) = \chi(P \cup Q) + \chi(P \cap Q). \tag{22}$$

Sind $P \subset E^i$ und $Q \subset E^{k-i}$ zwei in komplementären Unterräumen des E^k liegende Polyeder und bezeichnet $P \times Q$ das cartesische Produkt (Minkowskische Summe), so kann man von der Beziehung

$$h(P; x)\, h(Q; y) = h(P \times Q; x \times y)$$

ausgehen und durch φ-Integration mit Verwendung von (11) den Multiplikationssatz für die Eulersche Charakteristik

$$\chi(P)\, \chi(Q) = \chi(P \times Q) \tag{23}$$

hervorgehen lassen.

Durch Integration der Relation (16) ergibt sich zunächst die Entwicklungsformel

$$\chi(P) = \Sigma_1^n \{1 - \chi(P^{\nu-1} \cap C_\nu)\}, \tag{24}$$

und wird das Polyeder P durch die konvexen Polyeder C_ν so erzeugt, daß $P^{\nu-1} \cap C_\nu = S^{i_\nu - 1}$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$ ist — derartige Erzeugungen sind stets und auf beliebig viele Arten möglich — so nimmt die Entwicklung (24) mit Rücksicht auf (21) die Form

$$\chi(P) = -\Sigma_1^n (-1)^{i_\nu - 1} \tag{25}$$

an. Faßt man insbesondere die Erzeugung des Polyeders P ins Auge, die sich so ergibt, daß man zunächst die Eckpunkte, dann die Kanten usw. anfügt, so liefert (25) den Satz von Euler-Schläfli, wonach

$$\chi(P) = n_0 - n_1 + n_2 - \ldots \tag{26}$$

gilt, wobei n_i $(i = 0, \ldots, k)$ die Anzahl der i-dimensionalen Kanten des Polyeders bezeichnet.

New Recurrence Formulas for the $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$

By

B. Meulenbeld

(Received February 5, 1960)

1. Introduction

In a previous paper [1] Kuipers established a list of recurrence formulas for the generalized Legendre associated functions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$, two specified linearly independent solutions of the differential equation:

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\} w = 0.$$

He proved these formulas for the P-functions, and it may easily be shown that they are also valid for the Q-functions. Putting $m = n$ Erdélyi's list [2], (3.8) for the associated Legendre functions is found. In these formulas he only considered contiguous functions with consecutive values of k, m and n.

In the present paper we derive a new set of recurrence formulas for the $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$, where the differences between the k is $\pm \frac{1}{2}$, between the m is ± 2, and between the n is ± 1. Obviously by putting $m = n$ these formulas are not reducible to relations between the $P_k^m(z)$ and $Q_k^m(z)$.

In section 2 we give an important (till now not yet published) relation (1) between the P- and the Q-function, with aid of which in section 3 we derive for special values of the parameters relations between the P- and the Q-functions with different arguments, and in section 3 the recurrence relations mentioned above.

For the sake of brevity we put

$$\alpha = k+\tfrac{1}{2}(m+n),\ \beta = k-\tfrac{1}{2}(m-n),\ \gamma = k+\tfrac{1}{2}(m-n),\ \delta = k-\tfrac{1}{2}(m+n),$$

whereas $R_k^{m,n}(z)$ denotes both $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$.

2. Relations between the P- and the Q-functions

From the expansions of $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$ in terms of hypergeometric functions (see [3]), and by analytical continuation it can be easily verified that for z not lying on the real axis the following relation holds:

$$Q_{-\frac{1}{2}(1+m)}^{-2k-1,n}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = e^{-\pi i(2k+1)}\, 2^{k+\frac{1}{2}m-1}\, \Gamma(-\alpha)\, \Gamma(-\gamma)\, (z-1)^{\frac{1}{2}}\, P_k^{m,n}(z). \tag{1}$$

In the cases that α and γ are non-negative integers a readjustment is required by using limiting values.

Changing k into $-k-1$ and remembering that $P_k^{m,n}(z) = P_{-k-1}^{m,n}(z)$, it follows from (1):

$$Q_{-\frac{1}{2}(1+m)}^{2k+1,n}(z) = e^{4\pi i k}\, 2^{-2k-1}\, \frac{\Gamma(\beta+1)\, \Gamma(\delta+1)}{\Gamma(-\alpha)\, \Gamma(-\gamma)}\, Q_{-\frac{1}{2}(1+m)}^{-2k-1,n}(z),$$

or by interchanging the parameters:

$$Q_k^{-m,n}(z) = e^{-2\pi i m}\, 2^m\, \frac{\Gamma(\beta+1)\, \Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(\gamma+1)}\, Q_k^{m,n}(z).$$

The last formula was obtained in [4].

In particular, if $m = n$ the formula (1) becomes:

$$Q_{-\frac{1}{2}(1+m)}^{-2k-1,m}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = e^{-\pi i(2k+1)}\, 2^{k+\frac{1}{2}m-1}\, \Gamma(-k)\, \Gamma(-k-m)\, (z-1)^{\frac{1}{2}}\, P_k^m(z).$$

Applying Whipple's relation for the associated Legendre functions $P_k^m(z)$ and $Q_k^m(z)$:

$$P_k^m(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi i(2k+1)}}{\Gamma(-k-m)}\, (z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\, Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right), \quad (Re\, z > 0),$$

we obtain

$$Q_{-\frac{1}{2}(1+m)}^{-2k-1,m}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\pi i(2k+1)}\, \pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{k+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\, \Gamma(-k)\, \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}\, Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right),$$

or

$$Q_k^{m,-2k-1}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\pi i m}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,2^{-k-\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}\,Q_{2k+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right).$$

For $m = -2k-1$ we obtain:

$$Q^{m}_{-\frac{1}{2}(1+m)}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\pi i m}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,2^{-1}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}\,Q_{-m-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right),$$

and, on applying again Whipple's relation:

$$Q^{m}_{-\frac{1}{2}(1+m)}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = \frac{e^{\pi i m}\,\pi\,2^{-\frac{3}{4}}}{\cos\frac{1}{2}m\pi}\,(z-1)^{\frac{1}{2}}\,P^{m}_{-\frac{1}{2}(1+m)}(z),$$

or, interchanging the parameters:

$$Q_m^{-2m-1}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = \frac{e^{-2\pi i m}\,\pi\,2^{-\frac{3}{4}}}{\sin m\pi}\,(z-1)^{\frac{1}{2}}\,P_m^{-2m-1}(z),$$

valid for non-real z (by analytical continuation).

For the inverse relation of (1) we find:

$$P^{-2k-1,n}_{-\frac{1}{2}(m+1)}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = \frac{e^{-\pi i m}\,2^{k+\frac{1}{2}m+1}}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)}\,(z-1)^{\frac{1}{2}}\,Q_k^{m,n}(z). \qquad (2)$$

For $m = n$ we obtain in a similar way as above:

$$P_k^{m,-2k-1}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,2^{-k-\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}\,P_{2k+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}m}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right), (Re\,z>0).$$

Substituting for $Q_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{n,m}(-z)$ the expressions obtained by solving (2) in

$$Q_k^{n,m}(-z) = -\,2^{m-n}\,e^{\pi i(\pm k-m+n)}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\,Q_k^{m,n}(z),$$

(see [5], (25)), we find after interchanging the parameters:

$$P^{m,-2k-1}_{-\frac{1}{2}(n+1)}\left(\frac{z-3}{-z-1}\right) = e^{\mp\frac{1}{2}\pi i m}\,2^{-k-\frac{1}{2}n-1}\,(z+1)^{\frac{1}{2}}\,P_k^{m,n}(z),$$

where the upper or lower sign in the exponential has to be taken according as $Im\,z$ is positive or negative.

In particular if $n = -2k-1$:

$$P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(n+1)}\left(\frac{z-3}{-z-1}\right) = e^{\mp\frac{1}{2}\pi i m}\, 2^{-\frac{1}{2}}\,(z+1)^{\frac{1}{2}}\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(n+1)}(z).$$

For $m = n$ we have:

$$P^{m}_{-\frac{1}{2}(m+1)}\left(\frac{z-3}{-z-1}\right) = e^{\mp\frac{1}{2}\pi i m}\, 2^{-\frac{1}{2}}\,(z+1)^{\frac{1}{2}}\, P^{m}_{-\frac{1}{2}(m+1)}(z),$$

valid for non-real z.

3. Recurrence formulas for the $R^{m,n}_k(z)$

Applying (1) and (2) on the formulas given in [1], (6)—(13) we obtain after some calculation the following set of recurrence relations, valid for z not lying on the crosscut (for real $z > 1$ the validity follows by analytical continuation):

$$\gamma\, R^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(z) - (z+1)^{-\frac{1}{2}}\{(2k+1)z + 2k - 2n + 1\}\, R^{m,n}_k(z) + \\ + 2(\delta+1)\, R^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{3}$$

$$m\left\{(m^2-1)\frac{z+3}{z-1} + (2k+1)^2 - n^2\right\} R^{m,n}_k(z) = \\ = (m+1)\,\alpha(\beta+1)\,\gamma(\delta+1)\, R^{m-2,n}_k(z) + 4(m-1)\, R^{m+2,n}_k(z). \tag{4}$$

$$4\{(\beta+1)z - \alpha - m + 1\}\, R^{m+2,n}_k(z) - \alpha(\beta+1)\,\gamma(\gamma+1)\{(\alpha+1)z - \beta + m + 1)\} \\ R^{m-2,n}_k(z) + 2m\left\{(m^2-1)\frac{z+3}{z-1} + (2k+1)^2 - n^2\right\}(z+1)^{\frac{1}{2}}\, R^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{5}$$

$$4(\alpha z - \beta + m - 2)\, R^{m+2,n}_k(z) + \alpha(\beta+1)\,\delta(\delta+1)(-\beta z + \alpha + m + 2)\, R^{m-2,n}_k(z) + \\ + m\left\{(m^2-1)\frac{z+3}{z-1} + (2k+1)^2 - n^2\right\}(z+1)^{\frac{1}{2}}\, R^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{6}$$

$$2(z-1)\, R^{m+2,n}_k(z) - \{(\alpha+1)z - \beta + m + 1\}(\gamma+1)\, R^{m,n}_k(z) + \\ + 2(m+1)(\delta+1)(z+1)^{\frac{1}{2}}\, R^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{7}$$

$$2\{(\beta+1)z - \alpha - m + 1\}\, R^{m,n}_k(z) - \alpha(\beta+1)\,\gamma(z-1)\, R^{m-2,n}_k(z) + \\ + 4(m-1)(z+1)^{\frac{1}{2}}\, R^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{8}$$

$$\delta(-\beta z + \alpha + m + 2)\, R^{m,n}_k(z) + 2(z-1)\, R^{m+2,n}_k(z) - \\ - (m+1)\,\gamma(z+1)^{\frac{1}{2}}\, R^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(z) = 0. \tag{9}$$

$$2(\alpha z - \beta + m - 2)\, R_k^{m,n}(z) - \alpha(\beta+1)(\delta+1)(z-1)\, R_k^{m-2,n}(z) - \\ - 2(m-1)(z+1)^{1/2}\, R_{k-1/2}^{m,n+1}(z) = 0. \tag{10}$$

In [5], (27) is deduced the recurrence relation:

$$P_{k-1}^{m,n}(z)\, Q_k^{m,n}(z) - P_k^{m,n}(z)\, Q_{k-1}^{m,n}(z) = -\frac{k\, e^{\pi i m}\, 2^{-m+n}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+1)\, \Gamma(\delta+1)}.$$

By means of (1) and (2) this relation can be transformed into

$$P_k^{m,n}(z)\, Q_k^{m+2,n}(z) - P_k^{m+2,n}(z)\, Q_k^{m,n}(z) = \\ = \frac{(m+1)\, e^{\pi i m}\, 2^{-m+n-1}\, \Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\, \Gamma(\delta+1)\,(z-1)}. \tag{11}$$

For points on the crosscut $(-1 < x < 1)$ the functions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$ are defined:

$$P_k^{m,n}(x) = \tfrac{1}{2}\{e^{\frac{1}{2}\pi i m}\, P_k^{m,n}(x + 0\,i) + e^{-\frac{1}{2}\pi i m}\, P_k^{m,n}(x - 0\,i)\},$$

$$Q_k^{m,n}(x) = \tfrac{1}{2}\, e^{-\pi i m}\{e^{-\frac{1}{2}\pi i m}\, Q_k^{m,n}(x + 0\,i) + e^{\frac{1}{2}\pi i m}\, Q_k^{m,n}(x - 0\,i)\},$$

where $f(x \pm 0\,i)$ means $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x \pm i\,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

It is seen at once that formula (3) holds good for $z = x$ on the crosscut, and that the other formulas have the following slightly modified forms:

$$m\{(m^2-1)\frac{3+x}{1-x} - (2k+1)^2 + n^2\}\, R_k^{m,n}(x) = \\ = (m+1)\,\alpha(\beta+1)\,\gamma(\delta+1)\, R_k^{m-2,n}(x) + 4(m-1)\, R_k^{m+2,n}(x). \tag{4a}$$

$$4\{-(\beta+1)\,x + \alpha + m - 1\}\, R_k^{m+2,n}(x) + \alpha(\beta+1)\,\gamma(\gamma+1)\{(\alpha+1)x - \beta + m + 1\}$$

$$R_k^{m-2,n}(x) + 2m\{(1-m^2)\frac{3+x}{1-x} + (2k+1)^2 - n^2\}(1+x)^{1/2}\, R_{k+1/2}^{m,n-1}(x) = 0. \tag{5a}$$

$$4(\alpha x - \beta + m - 2)\, R_k^{m+2,n}(x) + \alpha(\beta+1)\,\delta(\delta+1)\,(-\beta x + \alpha + m + 2)$$

$$R_k^{m-2,n}(x) + m\{(m^2-1)\frac{3+x}{1-x} - (2k+1)^2 + n^2\}(1+x)^{1/2}\, R_{k-1/2}^{m,n+1}(x) = 0. \tag{6a}$$

$$2(1-x)\, R_k^{m+2,n}(x) - \{(\alpha+1)\,x - \beta + m + 1\}(\gamma+1)\, R_k^{m,n}(x) + \\ + 2(m+1)(\delta+1)(1+x)^{1/2}\, R_{k+1/2}^{m,n-1}(x) = 0. \tag{7a}$$

$$2\{(\beta+1)\,x - \alpha - m + 1\}\, R_k^{m,n}(x) - \alpha(\beta+1)\,\gamma(1-x)\, R_k^{m-2,n}(x) + \\ + 4(m-1)(1+x)^{1/2}\, R_{k+1/2}^{m,n-1}(x) = 0. \tag{8a}$$

$$\delta(-\beta x+\alpha+m+2)\,R_k^{m,n}(x)+2(1-x)\,R_k^{m+2,n}(x)- \\ -(m+1)\,\gamma(1+x)^{\frac{1}{2}}\,R_{k-\frac{1}{2}}^{m,n+1}(x)=0. \tag{9a}$$

$$2(\alpha x-\beta+m-2)\,R_k^{m,n}(x)-\alpha(\beta+1)(\delta+1)(1-x)\,R_k^{m-2,n}(x)- \\ -2(m-1)(1+x)^{\frac{1}{2}}\,R_{k-\frac{1}{2}}^{m,n+1}(x)=0. \tag{10 a}$$

$$P_k^{m,n}(x)Q_k^{m+2,n}(x)-P_k^{m+2,n}(x)Q_k^{m,n}(x)=\frac{(m+1)\,2^{-m+n-1}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\delta+1)\,(1-x)}. \tag{11a}$$

References

[1] *L. Kuipers*, Relations between contiguous generalized Legendre associated functions (recurrence formulas), Math. Scand. 6 (1958), 200—206.

[2] *A. Erdélyi* a. o. Higher transcendental functions I. New York-Toronto-London 1953.

[3] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*, Linear transformations of generalized Legendre's associated functions. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.; Ser. A 61, 330—333 (1958).

[4] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*, Some properties of a class of generalized Legendre's associated functions. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Ser. A 61, 186—197 (1958).

[5] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*, Related Legendre's associated functions. Arch. Math., F 66, 394—400 (1958).

[6] *B. Meulenbeld*, Wronskians of linearly independent solutions of the generalized Legendre's equation. Recurrence formulas. Math. Nachr. Dtsch. Akad. Wiss. (will soon appear), 194—200 (1960).

University of Technology,
Delft (Netherlands).

Linearitätsteste der k-dimensionalen Regressionsgleichung und Anwendungen

Von

Hans Schneeberger, Wiesbaden

(Eingegangen am 12. Februar 1960)

Liegt eine Meßreihe $(x_{1i}; \ldots x_{ki}; y_i)$ $(i = 1; \ldots n)$ vor, wo y eine zufällige, $x_1; \ldots x_k$ nichtzufällige Variable sind, so ist es ein in den Anwendungen der Statistik häufig auftretendes Problem, die Hypothese H_0

$$\zeta = f(x_1; \ldots x_k)$$

zu testen, wobei ζ der Erwartungswert von y, $f(x_1; \ldots x_k)$ die Regressionsfunktion ist. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Fall, daß $f(x_1; \ldots x_k)$ eine in $x_1; \ldots x_k$ lineare Funktion ist, oder durch geeignete Koordinatentransformation auf diese Form gebracht werden kann.

Hierzu liegen bisher nur Ergebnisse vor für den Fall, daß an mindestens einer Stelle $(x_1; \ldots x_k)$ mehrere nichtzusammenfallende y-Werte vorhanden sind. *Slutsky* [1] und *Pearson* [2] gaben zuerst unter der Voraussetzung, daß die Zufallsvariable y normalverteilt ist, Teste zur Prüfung von Regressionsfunktionen an. Diese Teste gelten nur näherungsweise und geben nur dann ein zuverlässiges Ergebnis, wenn die Anzahl der y-Werte zu entsprechenden Punkten $(x_1; \ldots x_k)$ groß ist. Eine Kritik dieser Teste findet sich in [3]. *R. A. Fisher* gibt in [3] unter der weiteren Voraussetzung, daß die Streuung σ^2 unabhängig von $x_1; \ldots x_k$ sei, einen exakten F-Test an. Dieser Test ist in der Lehrbuchliteratur (vgl. z. B. [4] Bd. 2, S. 235) allgemein als Test zum Prüfen der Linearitätshypothese der Regressionsfunktion bekannt.

Die Voraussetzung dieses F-Testes von *Fisher*, daß wesentlich mehr Funktionswerte y als Abszissenwerte $(x_1; \ldots x_k)$ vorliegen, bedeutet für die praktische Anwendbarkeit eine wesentliche Einschränkung. Die vorliegende Arbeit bringt nun Sätze, die gestatten, die k-dimensionale Linearitätshypothese

$$f(x_1; \ldots x_k) = \alpha + \beta_1(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \beta_k(x_k - \bar{x}_k)$$

zu testen, wobei über die Lage der Meßpunkte keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht werden. Zu diesem Zweck führen wir im $(x_1; \ldots x_k)$-Raum Gruppierungen allgemeiner Art ein. Liegen nur Gruppen einer speziellen Art vor, so ergibt sich die k-dimensionale Verallgemeinerung des bekannten F-Testes [3]. Für den Beweis der Linearitätsteste setzen wir in Abschnitt I voraus, daß die Zufallsgröße y um den Mittelwert ζ normalverteilt sei mit der konstanten Streuung σ^2. In Abschnitt II wird diese Voraussetzung verallgemeinert, indem den Meßwerten in verschiedenen Gruppen verschiedenes Gewicht zugeordnet wird. In Abschnitt III wird als Anwendung ein Test auf Identität von Mittelwerten gebracht.

I. k-dimensionale Linearitätsteste bei konstanter Streuung

Wir nehmen an, die Zufallsveränderliche y sei normalverteilt mit dem Mittelwert ζ und der von $x_1; \ldots x_k$ unabhängigen Streuung σ^2. Die Testhypothese H_0 lautet: Der Mittelwert ist eine lineare Funktion der k nichtzufälligen Veränderlichen $x_1; \ldots x_k$:

$$\zeta = \alpha + \beta_1(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \beta_k(x_k - \bar{x}_k) \text{ mit } \bar{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu}/n \quad (i=1; \ldots k) \qquad (1)$$

n ist die Anzahl sämtlicher Meßpunkte $(n > k+1)$. Die Punkte $(x_{1\nu}; \ldots x_{k\nu})$ mögen den vollständigen $x_1; \ldots x_k$-Raum aufspannen.

Wir gruppieren die n Meßwerte in m $(\geqq 2)$ Teilmengen. Die Punkte einer Teilmenge (= Gruppe) seien von denen einer anderen Gruppe stochastisch unabhängig. Wir nennen kurz die Gruppen voneinander stochastisch unabhängig. Diese Gruppen klassifizieren wir in folgender Weise:

Fassen wir $n^{(\varrho;r)}$ Punkte zu einer Gruppe zusammen, deren Abszissen $(x_1^{(\varrho;r)}; \ldots x_k^{(\varrho;r)})$ $(\nu = 1; \ldots n^{(\varrho;r)})$ im $(x_1; \ldots x_k)$-Raum in einer (genau) $(r-1)$-dimensionalen Hyperebene liegen, so nennen wir die Gruppe vom Typ T_r $(r=1; \ldots k+1)$. Die Anzahl dieser Gruppen sei m_r $(\varrho=1; \ldots m_r)$.

Es sei

$$\sum_{r=1}^{k+1} m_r = m \qquad (2)$$

die Gesamtzahl der Gruppen.

Für den Beweis des folgenden Satzes ist es zweckmäßig, sämtliche Gruppen unabhängig von den Typen von 1 bis m durchzunumerieren. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&n^{(1;1)} = n_1; \qquad \ldots\ n^{(m_1;1)} = n_{m_1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&n^{(1;k+1)} = n_{m_1+\ldots m_k+1} \ldots\ n^{(m_{k+1};k+1)} = n_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}=n_m}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&(i = 1; \ldots k) \\
&(\nu = 1; \ldots n^{(\varrho;r)} = n_{m_1+\ldots m_{r-1}+\varrho}) \\
x_{i\nu}^{(\varrho;r)} = x_{i\nu}^{(m_1+m_2+\ldots+m_{r-1}+\varrho)} = x_{i\nu}^{(\mu)}; \quad &(\varrho = 1; \ldots m_r) \\
&(r = 1; \ldots k+1) \\
&(\mu = 1; \ldots m)
\end{aligned}
$$

Aus der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Gruppen folgt:

$$\sum_{\sigma=1}^{k+1} \sum_{\varrho=1}^{m_\sigma} n^{(\varrho;\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n \tag{4}$$

Nach dieser Gruppeneinteilung können wir die Alternative der Testhypothese (1) folgendermaßen aussprechen: Der Mittelwert sei innerhalb jeder Gruppe eine lineare Funktion der unabhängigen Veränderlichen x_i ($i=; \ldots k$), wobei diese Hyperebenen nicht alle mit der Hyperebene (1) zusammenfallen sollen.

Wir zeichnen mit

$$Z_\nu^{(\mu)} = a + b_1 (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + b_k (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k);\ (\mu = 1; \ldots m;\ \nu = 1; \ldots n_\mu) \tag{5}$$

die Regressionshyperebene, die mit Hilfe sämtlicher n Meßpunkte berechnet wird, mit

$$Y_\nu^{(\mu)} = a^{(\mu)} + b_1^{(\mu)} (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + b_k^{(\mu)} (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k) \tag{6}$$

die Regressionshyperebene, die wir bei Zugrundelegung der Meßpunkte der μ-ten Gruppe erhalten.

Wir bilden die Streuungen innerhalb der Gruppen:

$$s_{1\mu}^2 = \frac{1}{f_{1\mu}} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Y_\nu^{(\mu)} - y_\nu^{(\mu)})^2 \tag{7}$$

mit

$$
\begin{aligned}
f_{1\mu} &= n_\mu - 1 && \text{im Fall einer Gruppe vom Typ } T_1 \\
&= n_\mu - 2 && \text{im Fall einer Gruppe vom Typ } T_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= n_\mu - (k+1) && \text{im Fall einer Gruppe vom Typ } T_{k+1}
\end{aligned}
$$

und definieren:

$s_{1\mu}^2 = 0$ im Fall einer Gruppe vom Typ T_1 mit $n_\mu = 1$

. . . . . .

$s_{1\mu}^2 = 0$ im Fall einer Gruppe vom Typ T_{k+1} mit $n_\mu = k+1$

Mindestens eine der Streuungen $s_{1\mu}^2$ sei von Null verschieden.

Dann gilt der

Satz 1: Die Zufallsgröße

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \quad \text{mit} \tag{8}$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} f_{1\mu} s_{1\mu}^2}{\sum_{\mu=1}^{m} f_{1\mu}} = \frac{1}{n-p} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2 \tag{9}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{p-k-1} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2 \tag{10}$$

$$(p = (k+1)\, m_{k+1} + k m_k + \ldots + r m_r + \ldots 2\, m_2 + m_1)$$

ist F-verteilt mit $(p-k-1;\ n-p)$ Freiheitsgraden. Ist $F > F_{P\%}$, so ist bei der zugrundegelegten Sicherheit von $P\%$ die Hypothese (1) zu verwerfen.

Beweis: Die n_μ Punkte $(x_{1\nu}^{(\mu)}; \ldots x_{k\nu}^{(\mu)})$ $(\nu = 1; \ldots n_\mu)$ liegen genau dann in einer Gruppe vom Typ T_r, wenn die Matrix

$$\mathfrak{D}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ x_{11}^{(\mu)} - \bar{x}_1 & \ldots & x_{1n_\mu}^{(\mu)} - \bar{x}_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{k1}^{(\mu)} - \bar{x}_k & \ldots & x_{kn_\mu}^{(\mu)} - \bar{x}_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

den Rang r hat. Dann hat auch die Matrix

$$\mathfrak{A}^{(\mu)} = \mathfrak{D}^{(\mu)} (\mathfrak{D}^{(\mu)})' = (a_{ij}^{(\mu)}) \qquad (i; j = 0; 1; \ldots k) \tag{12}$$

mit

$$a_{00}^{(\mu)} = n_\mu;\ a_{0j}^{(\mu)} = a_{j0}^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j);$$

$$(i; j = 1; \ldots k) \tag{13}$$

$$a_{ij}^{(\mu)} = a_{ji}^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{i\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_i)(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j)$$

den Rang r (vgl. [6]), und wir können annehmen, daß die Determinante

$$|\mathfrak{D}_r^{(\mu)}| = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ x_{11}^{(\mu)} - \bar{x}_1 & \dots & x_{1r}^{(\mu)} - \bar{x}_1 \\ \dots & & \dots \\ x_{r-1;1}^{(\mu)} - \bar{x}_{r-1} & \dots & x_{r-1;r}^{(\mu)} - \bar{x}_{r-1} \end{vmatrix} \tag{14}$$

von Null verschieden sei. Dann ist auch die Determinante

$$|\mathfrak{A}_r^{(\mu)}| = \begin{vmatrix} a_{00}^{(\mu)} & \dots & a_{0;r-1}^{(\mu)} \\ \dots & & \dots \\ a_{r-1;0}^{(\mu)} & \dots & a_{r-1;r-1}^{(\mu)} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{15}$$

und es gilt für diese Gruppe die Parameterdarstellung:

$$x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j = c_{0j}^{(\mu)} + c_{1j}^{(\mu)}(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \dots + c_{r-1;j}^{(\mu)}(x_{r-1;\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_{r-1}); \quad (j = r \dots k) \tag{16;1}$$

$$Y_\nu^{(\mu)} = \bar{a}^{(\mu)} + \bar{b}_1^{(\mu)}(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \dots + \bar{b}_{r-1}^{(\mu)}(x_{r-1;\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_{r-1}) \tag{16;2}$$

Hierbei sind $\bar{a}^{(\mu)}; \bar{b}_1^{(\mu)}; \dots \bar{b}_{r-1}^{(\mu)}$ wegen (15) eindeutige Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\mathfrak{A}_r^{(\mu)}(\bar{a}^{(\mu)}; \bar{b}_1^{(\mu)}; \dots \bar{b}_{r-1}^{(\mu)})' = (a_0^{(\mu)}; a_1^{(\mu)}; \dots a_{r-1}^{(\mu)})' \tag{17}$$

$$a_0^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} y_\nu^{(\mu)} \text{ und } a_j^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu}(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j)\, y_\nu^{(\mu)} \quad (j = 1; \dots r-1). \tag{18}$$

Auf Grund der $(k+1)$ linear unabhängigen Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \quad (j = 1; \dots k) \tag{19}$$

ist die quadratische Form

$$Q = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2 \quad \sigma^2\,\chi^2\text{-verteilt mit } n-k-1 \text{ Freiheitsgraden, und es gilt} \tag{20}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \text{ mit } Q_1 = \sum_{\mu=1}^{m} Q_1^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2 \tag{21}$$

$$Q_2 = \sum_{\mu=1}^{m} Q_2^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2.$$

Zwischen den n_μ Größen $(y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})$ der quadratischen Form $Q_1^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2$ besteht das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)}) = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})\,(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \qquad (j = 1; \ldots k) \end{aligned} \tag{22}$$

das im Fall einer Gruppe vom Typ T_r wegen (16) und (17) den Rang r hat; es ist also der Rang von $Q_1^{(\mu)}$: $r(Q_1^{(\mu)}) \leqq n_\mu - r$ und wegen (21) und der Unabhängigkeit der Gruppen:

$r(Q_1) \leqq n - (k+1)\, m_{k+1} - \ldots - 2\, m_2 - m_1 = n - p$ mit $p = (k+1)\, m_{k+1} + \ldots + r m_r + \ldots + m_1$.

Wir führen die Parameterdarstellung

$$x_{j\nu}^{(\mu)} = \lambda_{1\nu}^{(\mu)}\, x_{j1}^{(\mu)} + \lambda_{2\nu}^{(\mu)}\, x_{j2}^{(\mu)} + \ldots + \lambda_{n_\mu \nu}^{(\mu)}\, x_{jn_\mu}^{(\mu)} \qquad (j = 1; \ldots k) \tag{23}$$

mit

$$\lambda_{1\nu}^{(\mu)} + \lambda_{2\nu}^{(\mu)} + \ldots + \lambda_{n_\mu \nu}^{(\mu)} = 1 \qquad (\nu = 1; \ldots n_\mu) \tag{24}$$

ein. Liegt eine Gruppe vom Typ T_r vor, so sind von den n_μ Parametern $\lambda_{\tau\nu}^{(\mu)}$ nur r von Null verschieden, unter der Voraussetzung (14) z. B. die ersten r. Mit Hilfe dieser Parameterdarstellung erhalten wir

$$Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)} = \lambda_{1\nu}^{(\mu)}(Z_1^{(\mu)} - Y_1^{(\mu)}) + \lambda_{2\nu}^{(\mu)}(Z_2^{(\mu)} - Y_2^{(\mu)}) + \ldots + \lambda_{n_\mu \nu}^{(\mu)}(Z_{n_\mu}^{(\mu)} - Y_{n_\mu}^{(\mu)}) \tag{25}$$

Die quadratische Form $Q_2^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2$ in n_μ Variablen läßt sich somit im Fall einer Gruppe vom Typ T_r auf eine quadratische Form in r Variablen zurückführen, $Q_2 = \sum_{\mu=1}^{m} Q_2^{(\mu)}$ also auf eine quadratische Form in p Variablen. Zwischen diesen p Variablen bestehen nun die $k+1$ linearen Beziehungen

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)}) = 0 \\ &\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})\,(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \qquad (j = 1; \ldots k) \end{aligned} \tag{26}$$

die man durch Subtraktion der Gleichungen des linearen Systems (19) von den über alle Gruppen summierten Gleichungen des linearen

Systems (22) erhält. Für die $Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)}$ sind hierbei die Ausdrücke (25) einzusetzen. Die Matrix des Gleichungssystems (26) lautet dann:

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{1\nu}^{(1)} & \dots \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{n_1\nu}^{(1)} & \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{1\nu}^{(m)} & \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{n_m\nu}^{(m)} \\ \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{1\nu}^{(1)}(x_{1\nu}^{(1)}-\bar{x}_1) \dots \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{n_1\nu}^{(1)}(x_{1\nu}^{(1)}-\bar{x}_1) \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{1\nu}^{(m)}(x_{1\nu}^{(m)}-\bar{x}_1) \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{n_m\nu}^{(m)}(x_{1\nu}^{(m)}-\bar{x}_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{1\nu}^{(1)}(x_{k\nu}^{(1)}-\bar{x}_k) \dots \sum_{\nu=1}^{n_1} \lambda_{n_1\nu}^{(1)}(x_{k\nu}^{(1)}-\bar{x}_k) \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{1\nu}^{(m)}(x_{k\nu}^{(m)}-\bar{x}_k) \dots \sum_{\nu=1}^{n_m} \lambda_{n_m\nu}^{(m)}(x_{k\nu}^{(m)}-\bar{x}_k) \end{Vmatrix} \tag{27}$$

Um die lineare Unabhängigkeit der $k+1$ Gleichungen (26) zu beweisen, zeigen wir, daß der Rang der Matrix $\mathfrak{B}$ gleich $k+1$ ist. Dazu benutzen wir $(k+1)$-mal die Tatsache, daß der Rang einer Matrix sich nicht ändert, wenn man eine lineare Kombination der Spalten als neue Spalte hinzufügt.

1. Wir addieren sämtliche Spalten der Matrix $\mathfrak{B}$.

2. Wir multiplizieren die erste Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$ mit $(x_{11}^{(1)} - \bar{x}_1)$, die zweite mit $(x_{12}^{(1)} - \bar{x}_1)$, ... die n_1-te mit $(x_{1n_1} - \bar{x}_1)$, die (n_1+1)-te mit $(x_{11}^{(2)} - \bar{x}_1)$, ... schließlich die n-te mit $(x_{1n_m}^{(m)} - \bar{x}_1)$ und addieren die Spalten.

. . . . . .

$(k+1)$. Wir multiplizieren die erste Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$ mit $(x_{k1}^{(1)} - \bar{x}_k)$ die zweite mit $x_{k2}^{(1)} - \bar{x}_k$, ... die n-te Spalte mit $(x_{kn_m}^{(m)} - \bar{x}_k)$ und addieren die Spalten.

Dann erhalten wir die $k+1$ neuen Spalten

$$a_{00} = n \qquad a_{01} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) \qquad \dots a_{0k} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k)$$

$$a_{10} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) \quad a_{11} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1)^2 \qquad \dots a_{1k} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1)(x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k)$$

. . . . . .

$$a_{k0} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k) \quad a_{k1} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k)(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) \dots a_{kk} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k)^2 \tag{28}$$

Auf Grund der Voraussetzung, daß die n Meßpunkte den vollständigen $(x_1; \dots x_k)$-Raum aufspannen, hat die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, also

auch die Matrix $\mathfrak{B}$ den Rang $k+1$: Die $k+1$ Gleichungen des Systems (26) sind linear unabhängig. Es gilt somit: Rang $r(Q_2) \leqq p-k-1$.

Aus $Q = Q_1 + Q_2$; $r(Q_1) \leqq n-p$; $r(Q_2) \leqq p-k-1$ folgt dann: $r(Q_1) = n-p$; $r(Q_2) = p-k-1$. Nach dem Satz von Cochran sind also Q_1 und Q_2 $\sigma^2\,\chi^2$-verteilt mit $n-p$ bzw. $p-k-1$ Freiheitsgraden und voneinander stochastisch unabhängig. Damit haben wir gezeigt, daß die Zufallsgröße (8) F-verteilt mit $(p-k-1;\ n-p)$ Freiheitsgraden ist.

Ist die Testhypothese (1) richtig, so ist $E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\}$ (vgl. (9) und (10)). Ist dagegen die Alternative der Testhypothese richtig, so ist $E\{s_2^2\} > E\{s_1^2\}$. Die Alternative der Testhypothese lautet im Fall einer Gruppe vom Typ T_r und unter der Voraussetzung (14)

$$E\{y_\nu^{(\mu)}\} = \eta_\nu^{(\mu)} = \bar{\alpha}^{(\mu)} + \bar{\beta}_1^{(\mu)}(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + \bar{\beta}_{r-1}^{(\mu)}(x_{r-1;\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_{r-1}). \quad (29)$$

Dann ist

$$E\{Y_\nu^{(\mu)}\} = \eta_\nu^{(\mu)} \text{ mit } Y_\nu^{(\mu)} \text{ aus } (16;2) \quad (30)$$

Führen wir

$$\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}_1(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + \bar{\beta}_k(x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k) \quad (31)$$

ein, wobei die Parameter $\bar{\alpha}; \bar{\beta}_1; \ldots \bar{\beta}_k$ dem (19) analogen Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\eta_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)}) = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\eta_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)})(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \qquad (j = 1; \ldots k) \quad (32)$$

genügen, so ist

$$E\{Z_\nu^{(\mu)}\} = \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)}. \quad (33)$$

Nun sind im Fall einer Gruppe vom Typ T_r die quadratischen Formen

$P_1^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2$ $\sigma^2\,\chi^2$-verteilt mit $n_\mu - r$ Freiheitsgraden

$P_2^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Y_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})^2 \sigma^2$ χ^2-verteilt mit r Freiheitsgraden

und voneinander stochastisch unabhängig. Wegen der Unabhängigkeit der Gruppen sind dann auch $P_1 = \sum_{\mu=1}^{m} P_1^{(\mu)}$ und $P_2 = \sum_{\mu=1}^{m} P_2^{(\mu)}$ $\sigma^2\,\chi^2$-verteilt mit $n-p$ bzw. p Freiheitsgraden und voneinander stochastisch unabhängig.

Es ist also weiterhin:

$$E\{s_1^2\} = E\{P_1/(n-p)\} = \sigma^2. \tag{34}$$

Führen wir in P_2 die Substitution

$$Y_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)} = [(Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) + (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})] + (Z_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)}) \tag{35}$$

ein, so wird $P_2 = q_1 + q_2$ mit

$$q_1 = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} [(Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) + (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})]^2 \tag{36}$$

$$q_2 = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)})^2.$$

Die quadratische Form q_1 in n Variablen läßt sich wieder auf eine quadratische Form in p Variablen zurückführen. Man hat hierzu in (25) $Z - Y$ durch $[(Y - Z) + (\bar{\zeta} - \eta)]$ zu ersetzen. Zwischen diesen p Variablen gelten die $k + 1$ linear unabhängigen Beziehungen:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} [(Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) + (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})] = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} [(Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) + (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})] (x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \quad (j=1; \ldots k) \tag{37}$$

Die lineare Unabhängigkeit zeigt man, indem man in (26) wieder $Y-Z$ durch $[(Y-Z)+(\bar{\zeta}-\eta)]$ ersetzt. Dann sind q_1 und q_2 $\sigma^2 \chi^2$-verteilt mit $p - k - 1$ bzw. $k + 1$ Freiheitsgraden und man erhält aus (36; 1)

$$E\{q_1\} = (p-k-1)\,\sigma^2 = E\{\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2 - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})^2\} \tag{38}$$

und schließlich

$$E\{s_2^2\} = \frac{1}{p-k-1} E\{\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2\} =$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{p-k-1} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})^2 \geqq \sigma^2 \tag{39}$$

$$E\{s_2^2\} = \sigma^2 \text{ genau dann, wenn } \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} = \eta_\nu^{(\mu)}, \tag{40}$$

wenn also die Testhypothese richtig ist.

Spezialfall: Liegen nur Gruppen vom Typ T_1 vor ($m_1 = m$), so wird aus (8)

$$F = \frac{\dfrac{1}{m-k-1} \sum_{\mu=1}^{m} n_\mu (Z^{(\mu)} - \bar{y}^{(\mu)})^2}{\dfrac{1}{n-m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - \bar{y}^{(\mu)})^2}$$

d. i. im Fall $k = 1$ die bekannte Prüfgröße zum Testen der Linearität von Geraden (vgl. [4]).

Der vorliegende k-dimensionale Linearitätstest ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Varianzanalyse [5], der gestattet, die Mittelwerte von normalverteilten Zufallsgrößen mit derselben Streuung auf Identität zu testen. An die Stelle der Testhypothese

$$E\{y^{(1)}\} = a^{(1)} = E\{y^{(2)}\} = a^{(2)} = \ldots = E\{y^{(m)}\} = a^{(m)}$$

tritt jetzt die allgemeinere Hypothese

$$\begin{aligned} E\{y^{(\mu)}\} &= \eta^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} (x_1^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + \beta_k^{(\mu)} (x_k^{(\mu)} - \bar{x}_k) \\ &= \alpha + \beta_1 (x_1^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \ldots + \beta_k (x_k^{(\mu)} - \bar{x}_k); \qquad (\mu = 1; \ldots m) \end{aligned}$$

II. Verallgemeinerung der k-dimensionalen Linearitätsteste auf gruppenweise verschiedene Streuungen

Wir nehmen in Verallgemeinerung von Abschnitt I an, daß die Streuung innerhalb einer Gruppe konstant gleich $\sigma^2/w^{(\mu)}$ sei, wobei $w^{(\mu)} > 0$ ein der μ-ten Gruppe zugeordneter Gewichtsfaktor sei. Da die Streuung sich innerhalb einer Gruppe nicht ändert, berechnen sich die Teilregressions-Hyperebenen $Y^{(\mu)}$ weiterhin aus den Gleichungen I (16) ... (18) und insbesondere gilt das Gleichungssystem I (22). Hier und im Folgenden wird (vgl. I (1))

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} x_{j\nu}^{(\mu)}}{\sum_{\mu=1}^{m} n_\mu w^{(\mu)}} \qquad (j = 1; \ldots k) \qquad (1')$$

Man zeigt nun, daß auf Grund der Voraussetzung, daß die Meßpunkte den vollständigen $(x_1; \ldots x_k)$-Raum aufspannen sollen, die Matrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) = 0 \\ &\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)}) (x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \qquad (j = 1; \ldots k) \qquad (19') \end{aligned}$$

den Rang $k+1$ hat, also eine eindeutige Gesamt-Regressionshyperebene

$$Z_\nu^{(\mu)} = a + b_1(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_2) + \ldots + b_k(x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k)$$

existiert. Die quadratischen Formen

$$Q_1' = \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2;\ Q_2' = \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2 \qquad (21')$$

sind wieder $\sigma^2\,\chi^2$-verteilt mit $n-p$ bzw. $p-k-1$ Freiheitsgraden und voneinander stochastisch unabhängig,

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \text{ mit } s_1^2 = \frac{Q_1'}{n-p} \text{ und } s_2^2 = \frac{Q_2'}{p-k-1} \qquad (8')$$

ist also F-verteilt mit $(p-k-1;\, n-p)$ Freiheitsgraden.

Ist die Alternative (29) der Testhypothese richtig, so erhalten wir, wenn wir die zu I analoge Rechnung mit von eins verschiedenen Gewichten durchführen:

$$E\{s_1^2\} = \sigma^2; \qquad (34')$$

$$E\{s_2^2\} = \sigma^2 + \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\bar{\zeta}_\nu^{(\mu)} - \eta_\nu^{(\mu)})^2 \geqq \sigma^2 \qquad (39')$$

und $E\{s_2^2\} = \sigma^2$ genau dann, wenn die Testhypothese richtig ist. Hierbei genügt $\bar{\zeta}$ dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\eta_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)}) = 0$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (\eta_\nu^{(\mu)} - \bar{\zeta}_\nu^{(\mu)})\,(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j) = 0 \qquad (j = 1; \ldots k).$$

Damit erhalten wir

Satz 1': Der Quotient $F = \dfrac{s_2^2}{s_1^2}$ mit

$$s_1^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2;\ s_2^2 = \frac{1}{p-k-1} \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2$$

ist F-verteilt mit $(p-k-1;\, n-p)$ Freiheitsgraden. Ist $F > F_{P\%}$, so ist bei der zugrundegelegten Sicherheit von $P\%$ die Hypothese der Linearität zu verwerfen.

III. Test auf Identität von Mittelwerten

Gegeben seien im $(x_1; \ldots; x_k; y)$-Raum m voneinander stochastisch unabhängige Meßreihen vom Typ T_{k+1} $(m \geqq 2)$. Wir nehmen an, daß die Zufallsgrößen $y_\nu^{(\mu)}$ $(\mu = 1; \ldots m; \nu = 1; \ldots n_\mu)$ $(\sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n)$ normalverteilt sind mit den Mittelwerten

$$\eta_\nu^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}(x_{1\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_1) + \beta_2^{(\mu)}(x_{2\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_2) + \ldots + \beta_k^{(\mu)}(x_{k\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_k) \quad (41)$$

und den Streuungen $\sigma^2/w^{(\mu)}$.

Wir wollen die Hypothese testen, daß die m Mittelwerte (41) identisch sind, daß also

$$\eta^{(1)} \equiv \eta^{(2)} \equiv \ldots \equiv \eta^{(m)} \equiv \zeta \equiv \alpha + \beta_1(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \beta_k(x_k - \bar{x}_k) \quad (42)$$

(identisch in den x_i) ist.

Dann liegen als Gruppen (vom Typ T_{k+1}) die m Meßreihen vor. Wir berechnen den Schätzwert Z für den Mittelwert ζ sämtlicher n Meßpunkte aus II (19′), den Schätzwert $Y^{(\mu)}$ für den μ-ten Mittelwert $\eta^{(\mu)}$ aus I (17) $(r = k + 1)$. Beide Gleichungssysteme sind eindeutig auflösbar. Dann erhalten wir als Spezialfall von Satz 1′ den

Satz 2 (Identitätssatz für Mittelwerte):

Der Quotient $F = \dfrac{s_2^2}{s_1^2}$ mit

$$s_1^2 = \frac{1}{n-(k+1)\,m} \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2;$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m(k+1) - k - 1} \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (Z_\nu^{(\mu)} - Y_\nu^{(\mu)})^2$$

ist F-verteilt mit $(m-1)(k+1)$ und $n - m(k+1)$ Freiheitsgraden. Ist $F > F_{P\%}$, so ist bei der zugrundegelegten Sicherheit von $P\%$ die Hypothese der Identität der Mittelwerte (41) zu verwerfen.

Ist insbesondere $w^{(1)} = w^{(2)} = \ldots = w^{(m)} = 1$, so bedeutet die Testhypothese H_0, daß sämtliche m Meßreihen Stichproben aus derselben $(\zeta; \sigma^2)$-normalverteilten Grundgesamtheit sind.

Auf Grund der Voraussetzungen von Abschnitt I und II ist

$$q = \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - \zeta_\nu^{(\mu)})^2 \quad \sigma^2\,\chi^2\text{-verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden.}$$

Dann sind

$$q_1 = \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2 \quad \sigma^2\,\chi^2\text{-verteilt mit } n-k-1 \text{ Freiheitsgraden}$$

$$q_2 = (a-\alpha)^2 \sum_{\nu=1}^{n_\mu} n_\mu\, w^{(\mu)} \qquad \sigma^2\,\chi^2\text{-verteilt mit einem Freiheitsgrad}$$

$$q_3 = \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (b_i - \beta_i)\,(b_j - \beta_j)\,(x_{i\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_i)\,(x_{j\nu}^{(\mu)} - \bar{x}_j)$$

$$\sigma^2\,\chi^2\text{-verteilt mit } k \text{ Freiheitsgraden.}$$

q_1; q_2; und q_3 sind voneinander stochastisch unabhängig.

Wir können also im Falle einer Annahme der Identitätshypothese mit Hilfe der Studentverteilten Zufallsgröße

$$t = \frac{(a-\alpha)\sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} n_\mu}}{s} \quad \text{mit} \quad s^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{\mu=1}^{m} w^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (y_\nu^{(\mu)} - Z_\nu^{(\mu)})^2$$

und der F-verteilten Zufallsgröße

$$F = \frac{q_3}{k s^2}$$

Vertrauensaussagen über die theoretischen Regressionskoeffizienten $\alpha; \beta_1; \ldots; \beta_k$ machen.

Literatur

[1] *E. Slutsky* (1914): "On the criterion of goodness of fit of the regression lines and on the best method of fitting them to data". J. Roy. Statist. Soc., 77.

[2] *K. Pearson* (1916): "On the Application of goodness of fit tables to test regression curves and theoretical curves used to describe observational or experimental data". Biometrika 11.

[3] *R. A. Fisher* (1922): "The goodness of fit of regression formulae and the distribution of regression coefficients". J. Roy. Statist. Soc., 85.

[4] *M. G. Kendall*: "The advanced theory of statistics". London, Ch. Griffin & Co., 1948, Bd. 1 und 2.

[5] *S. S. Wilks*: "Mathematical Statistics", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950

[6] *R. Zurmühl*: „Matrizen", Springer-Verlag, 1958.

Über eine Volumenabschätzung für Polyeder

Von

L. Fejes Tóth, Budapest

(Eingegangen am 15. März 1960)

A. Florian[1] hat gezeigt, daß das Volumen V eines konvexen Polyeders von der Flächenzahl f, Kantenzahl k, Eckenzahl e und vom Umkugelradius 1 stets der Ungleichung

$$V \leqq \frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{cotg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi e}{2k}\right) \tag{1}$$

Genüge leistet, mit Gleichheit für und nur für die Platonischen Körper. Wir wollen hier auf eine naheliegende Verschärfung dieser Ungleichung hinweisen, die eine entsprechende Extremaleigenschaft einiger Archimedischen Körper vermuten läßt und es gestattet, eine kleine Lücke im Florianschen Beweis zu beheben. Um diese Verschärfung herzuleiten, legen wir die Hauptschritte des Florianschen Beweises kurz auseinander.

Es sei t eine Seitenfläche des Polyeders mit der Seitenzahl p, h die konvexe Hülle von t und des Mittelpunktes O der Umkugel K, v das Volumen von h und π der Flächeninhalt der Zentralprojektion von t auf K. Dann gilt die Ungleichung

$$v \leqq \frac{p}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} \left(1 - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right) = U(\tau, p),$$

die bedeutet, daß der Inhalt v der Pyramide h im Falle einer K einbeschriebenen regulären Grundfläche sein Maximum erreicht, wenn Eckenzahl p und Projektionsinhalt τ der Grundfläche t vorgegeben sind.

Die Funktion $U(\tau, p)$ ist für $0 \leqq \tau \leqq \pi$, $p \geqq 3$ konkav. Daraus folgt (1) für Polyeder, deren sämtliche Flächen in O einen Raumwinkel $\tau \leqq \pi$ aufspannen:

$$V = \Sigma v \leqq \Sigma U(\tau, p) \leqq f\, U\left(\frac{4\pi}{f}, \frac{2k}{f}\right).$$

[1] Monatshefte f. Math. **60**, 130—156 (1956).

Ist dagegen für einige Flächen $\tau > \pi$, so wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß $U(\tau, p)$ für $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ eine zunehmende und für $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ eine abnehmende Funktion von τ ist. Daraus folgt leicht, daß für $\tau > \pi$ $U(\tau, p) < U(\pi, p)$ ausfällt.

Wir beschränken uns zunächst auf Polyeder, für die

$$\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi e}{2k} \leqq \sqrt{3}$$

gilt. Ersetzen wir im Wertsystem $\{\tau\}$ jeden Wert $\tau > \pi$ durch π und bezeichnen das neue Wertsystem mit $\{\tau'\}$, so gilt

$$V \leqq \Sigma\, U(\tau, p) \leqq \Sigma\, U(\tau', p) \leqq f\, U\left(\frac{\Sigma\,\tau'}{f}, \frac{2k}{f}\right).$$

Da aber für $\tau = 4\pi/f$, $p = 2k/f$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} = \operatorname{cotg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi(f-2)}{2k} = \operatorname{cotg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi(k-e)}{2k} =$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{cotg}\frac{\pi e}{2k} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ausfällt, ist $U\left(\tau, \frac{2k}{f}\right)$ in $\left(0, \frac{4\pi}{f}\right)$ eine zunehmende Funktion von τ, so daß

$$V \leqq f\, U\left(\frac{\Sigma\,\tau'}{f}, \frac{2k}{f}\right) \leqq f\, U\left(\frac{4\pi}{f}, \frac{2k}{f}\right)$$

gilt.

Damit wären nur noch die endlich vielen Fälle

$$\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi e}{2k} > \sqrt{3}$$

übrig. Nachdem nun *Florian* den Fall der vierseitigen Pyramide durch elementare Erwägungen erledigt, schreibt er: „Die weiteren Fälle dürften sich auf ähnliche Weise durch elementargeometrische Überlegungen erledigen lassen". Da aber eine derartige elementargeometrische Behandlung in einigen Fällen nicht einfach zu sein scheint, verfahren wir folgendermaßen.

Es seien (τ_1, p_1) und (τ_2, p_2) zwei Punkte im Bereich $0 \leqq \tau \leqq \pi$, $p \geqq 3$, S ihre Verbindungsstrecke, M der Mittelpunkt von S und schließlich $(\bar{\tau}_1, \bar{p}_1)$ und $(\bar{\tau}_2, \bar{p}_2)$ zwei weitere, zu M symmetrische innere Punkte von S. Aus der Konkavität von $U(\tau, p)$ folgt, daß

$$U(\tau_1, p_1) + U(\tau_2, p_2) < U(\bar{\tau}_1, \bar{p}_1) + U(\bar{\tau}_2, \bar{p}_2).$$

Durch sukzessive Anwendung dieser Ungleichung auf je zwei Glieder der Summe $\Sigma\, U(\tau', p)$ läßt sich diese Summe so vergrößern, daß inzwischen die Seitenzahlen p durch solche ganze Zahlen ersetzt werden, die immer näher aneinander heranrücken. Schließlich werden alle diese Zahlen entweder in eine einzige ganze Zahl oder in zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen übergehen. Dann können wir noch diejenigen τ-Werte, die zu gleichen p-Werten gehören, durch ihren Mittelwert ersetzen. Da bei allen diesen Schritten weder $\Sigma\, p$ $(= 2k)$, noch $\Sigma\, \tau'$ $(\leqq 4\pi)$ sich verändert, erhalten wir folgenden

Satz. *Bedeuten f und k die Flächen- und Kantenzahl eines in der Einheitskugel liegenden konvexen Polyeders, so genügt das Volumen V der Ungleichung*

$$V \leqq \max \{n_1\, U(\tau_1, p_1) + n_2\, U(\tau_2, p_2)\}, \tag{2}$$

wo n_1, n_2, p_1 und p_2 durch die Gleichungen

$$n_1 + n_2 = f, \quad n_1 p_1 + n_2 p_2 = k, \quad p_2 - p_1 = 1$$

definierte natürliche Zahlen bedeuten, das Maximum auf durch die Ungleichungen $\tau_1 \geqq 0$, $\tau_2 \geqq 0$, $n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 \leqq 4\pi$ gegebene Werte von τ_1 und τ_2 zu erstrecken ist und $U(\tau, p)$ durch

$$U(\tau, p) = \frac{p}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} \left(1 - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right)$$

gegeben ist.

$U(\tau, p)$ ist für einen festen Wert von p $(\geqq 3)$ nicht nur in $(0, \pi)$, sondern im ganzen Intervall $(0, 2\pi)$ eine konkave Funktion von τ. Ist daher die Eckenzahl der Flächen gleich oder treten als Eckenzahlen nur zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen auf, so ist es nicht nötig, die τ-s durch die τ'-s zu ersetzen, so daß in der Ungleichung $n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 \leqq 4\pi$ nur das Gleichheitszeichen zu berücksichtigen ist. Es scheint, daß auch sonst das Maximum immer im Falle $n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 = 4\pi$ erreicht wird.

Nun sind die möglichen Werte von f, e und k mit $\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi e}{2k} > \sqrt{3}$ die folgenden: 1. $f = e = 4$, $k = 6$, 2. $f = e = 5$, $k = 8$, 3. $f = 5$, $e = 6$, $k = 9$, 4. $f = 6$, $e = 5$, $k = 9$, 5. $f = e = 6$, $k = 10$, 6. $f = 6$, $e = 7$, $k = 11$, 7. $f = 7$, $e = 6$, $k = 11$. Im Falle 1 und 4 handelt es sich, wegen $3f = 2k$, um Dreieckspolyeder (Tetraeder und 3-seitige Doppelpyramide), so daß hier, mit Rücksicht auf die obige Bemerkung, (1) und (2) gleichwertig sind. In den übrigen Fällen sind die Zahlenwerte der durch (1) und (2) gelieferten Volumenschranken S_1 bzw. S_2 diese[2]: 2. $S_1 = 0{,}87\ldots$, $S_2 = 0{,}85\ldots$. 3. $S_1 = 1{,}09\ldots$, $S_2 = 1{,}05\ldots$, 5. $S_1 = 1{,}20\ldots$, $S_2 = 1{,}16\ldots$, 6. $S_1 = 1{,}39\ldots$, $S_2 = 1{,}35\ldots$, 7. $S_1 = 1{,}28\ldots$, $S_2 = 1{,}25\ldots$. Da in allen Fällen $S_1 > S_2$ ausfällt, sind die fraglichen Fälle erledigt.

In der folgenden Tabelle vergleichen wir das Volumen V einiger Archimedischen Körper (vom Umkugelradius 1) mit unserer Volumenschranke S (rechte Seite von (2)) bezüglich sämtlicher Polyeder mit derselben Flächen- und Eckenzahl.

	f	e	V	S	$100\,(S-V)/V$
(3, 3, 3, 4)	10	8	1,719	1,796	4,48
(3, 3, 3, 3, 4)	38	24	3,251	3,269	0,55
(3, 4, 3, 4)	14	12	2,357	2,399	1,78
(3, 4, 4, 4)	26	24	3,183	3,195	0,38
(4, 4, 5)	7	10	1,799	1,872	4,06
(5, 6, 6)	32	60	3,633	3,642	0,25

Besonders hervorzuheben ist der Ikosaederstumpf (5, 6, 6), wo der perzentuelle Volumenüberschuß am kleinsten ist. Da er ein Dreikantpolyeder ist, besitzt er die größtmögliche Eckenzahl unter allen Polyedern mit 32 Flächen. Es läßt sich daher vermuten, daß er unter sämtlichen konvexen Polyedern von der Flächenzahl 32, die in einer festen Kugel enthalten sind, das größtmögliche Volumen aufweist.

[2] Für die numerischen Rechnungen bin ich Herrn *G. Krammer* verpflichtet.

Buchbesprechungen

Aus meinen Lebenserinnerungen. Von *W. Lietzmann*. Im Auftrage von Walter und Käthe Lietzmann herausgegeben von *K. Fladt*. 114 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1960. Brosch. DM 6.80.

Alle jene, die den Autor gekannt haben, werden das Buch mit großem Interesse lesen. Aber noch viel mehr jene, die einiges über die Entwicklung der Schulmathematik im 20. Jahrhundert erfahren wollen. Der Autor stand durch Jahrzehnte im Mittelpunkt der Reformen des mathematischen Unterrichtes und kann daher aus eigener Anschauung darüber berichten. Von bleibendem Wert ist seine Auffassung über die Ausbildung der Lehramtskandidaten an den Universitäten und im Probejahr (Seminarjahr). *N. Hofreiter*, Wien

Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Unter verantwortlicher Redaktion von *K. Schröder*. (Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin — Akademie der Wissenschaften der UdSSR) X, 336 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959. Geb. DM 58.—.

Da *Euler* 25 Jahre an der Berliner Akademie der Wissenschaften und 31 Jahre an der damaligen Petersburger Akademie wirkte, war es wohl fast selbstverständlich, daß sich beide Akademien bei der 250jährigen Wiederkehr seines Geburtstages veranlaßt sahen, das Andenken an ihn durch feierliche Tagungen, sowie durch die gemeinsame Herausgabe einer Festschrift in zwei Bänden zu würdigen, von denen der vorliegende Band die Vorträge bei der Berliner Tagung wiedergibt.

Der größere Teil der Vorträge zeigt, wie *Eulers* Schaffen noch gegenwärtig aktuelle wissenschaftliche Probleme beeinflußt hat. Ein anderer Teil der Vorträge ergänzt und vertieft unsere Kenntnisse von *Eulers* Leben und Schaffen. Hier sei insbesondere auf die Arbeit von *Mikhailov* hingewiesen, in der u. a. ein Teil von *Eulers* Tagebuch abgedruckt ist und viele Faksimile beigefügt sind.

Die Titel der Vorträge seien genannt: *D. Barbilian*, Ein Analogon des Diskriminantensatzes in inseparablen Erweiterungen. *K.-R. Biermann*, Einige Euleriana aus dem Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. *W. Blaschke*, Euler und die Kinematik. Über affine Kinematik. *E. Bompiani*, Geometria degli elementi differenziali. *O. Boruvka*, Mathias Lerch als Fortsetzer der Klassiker in der Theorie der Gammafunktion. *V. Brun*, Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruchentwicklung der Zahl e verallgemeinern. *B. N. Delaunay* und *A. M. Vinogradov*, Über den Zusammenhang zwischen den Lagrangeschen Klassen der Irrationalitäten mit begrenzten Teilnennern und den Markoffschen Klassen der extremen Formen. *A. Denjoy*, Les dérivées premières symétriques. *M. Eichler*, Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale. *P. Erdös*, Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie. *A. O. Gelfond*, Über einige Prozesse der Approximation von Funktionen. *H. Grell*, Allgemeine und Elementquotientenringe in endlichen algebraischen Zahlkörpern. *J. E. Hofmann*, Um Eulers erste Reihenstudien.

L. Holzer, Eulers Forschungen in seiner Anleitung zur Algebra vom Standpunkt der modernen Zahlentheorie. *A. P. Juschkewitsch*, Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. *K. Kuratowski*, Über die Konvergenz von Mengen. *E. Lamprecht*, Durch Produktdarstellungen erklärte Zetafunktionen. *G. K. Mikhailov*, Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler. *A. G. Postnikov*, Ein Analogon des Tarryschen Problems für die Exponentialfunktion. *K. Reidemeister* und *A. Brandis*, Über freie Erzeugendensysteme der Wegegruppe eines zusammenhängenden Graphen. *H. Salié*, Eulersche Zahlen. *W. Schmeidler*, Über symmetrische algebraische Integralgleichungen. *C. L. Siegel*, Zur Vorgeschichte des Eulerschen Additionstheorems. *S. Stoilow*, Bemerkungen über die durch ganze Relationen definierten analytischen Funktionen. *P. Turán*, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *P. Funk, Wien*

Lehre und Forschung an der Universität Basel zur Zeit der Feier ihres fünfhundertjährigen Bestehens. Dargestellt von Dozenten der Universität Basel. 365 S. Basel: Birkhäuser Verlag. 1960. Geb. sFr. 11.—.

Die Gedenkschrift enthält eine von *M. Eichler* verfaßte Erörterung über die Frage, welche Stellung der Mathematik innerhalb des Geisteslebens unserer Zeit zukommt. *P. Funk, Wien*

Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14.—21. August 1958. Herausgegeben von *J. A. Todd*. LXIV, 573 S. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. 65/— net.

Der Band enthält einen offiziellen Bericht über den im August 1958 in Edinburgh stattgefundenen Internationalen Mathematiker-Kongreß. Field-Medaillen wurden an *F. K. Roth* und *R. Thom* in Würdigung ihrer Arbeiten über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen bzw. über die Theorie des Cobordismus verliehen. An dem Kongreß haben 1658 ordentliche und 757 assoziierte Mitglieder aus aller Welt teilgenommen. Auf Einladung des Kongreß-Komitees fanden 19 einstündige und 37 halbstündige Vorträge statt. Außerdem wurden 604 Kurzvorträge gehalten. Sie geben einen Überblick über die in den letzten fünf Jahren erzielten Fortschritte und bilden die Grundlagen für weitere Forschungen. Der Band enthält ausführliche Referate über die ein- und halbstündigen Vorträge und ein Verzeichnis der Kurzvorträge. Auszüge davon wurden den Teilnehmern zu Beginn des Kongresses überreicht.
N. Hofreiter, Wien

Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik. Von *H. Meschkowski*. Zweite, durchgesehene und erweiterte Auflage. Mit 19 Textabb. und 4 Kunstdrucktafeln, VII, 141 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1960. Geb. DM 12.80.

Daß schon nach so kurzer Zeit eine zweite Auflage dieses Buches herausgebracht werden konnte, zeigt, daß der Verfasser die Aufgabe, einem weiteren Leserkreis die Gedankenwelt der Mathematik nahe zu bringen, in glücklicher Weise gelöst hat. Da die erste Auflage in dieser Zeitschrift Mh. Math. **61**, 361 (1957) besprochen wurde, ist es nur notwendig, auf die Änderungen in der zweiten Auflage kurz einzugehen: Ein neues Kapitel bespricht die „operative Mathematik" von *Lorenzen*, und im Kapitel „Formalismus" werden die „Elemente der Mathematik" von *Bourbaki* erwähnt. Ein Anhang mit dem Titel „Menschenbildung im Zeitalter der Automatisierung" legt die Gedanken des Verfassers über dieses Thema dar. *E. Hlawka*, Wien

A Collection of Mathematical Problems. Von *S. M. Ulam.* (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Number 8.) XIII, 150 S. New York-London: Interscience Publishers. 1960. Geb. $ 5.—.

Dieses Buch ist wohl in seinem Aufbau einzigartig, denn es enthält eine Sammlung von Problemen, die aber im Unterschied zu dem bekannten Werk von *Pólya* und *Szegö* bis heute ungelöst sind. Dieses Sammlung von Aufgaben gliedert sich in acht Kapitel: 1. Mengentheorie. 2. Algebraische Probleme. 3. Metrische Räume. 4. Topologische Räume. 5. Topologische Gruppen. 6. Einige Fragen der Analysis (vor allem Ergodentheorie). 7. Physikalische Systeme. 8. Rechenmaschinen als heuristisches Hilfsmittel (Monte Carlo Methoden, hydrodynamische Probleme, usw.). Das Buch stellt eine ganz hervorragende Einführung in aktuelle Probleme der Forschung dar und wird sicher zu vielen wissenschaftlichen Untersuchungen Anlaß geben. Es sind natürlich, wie auch schon aus der Inhaltsangabe hervorgeht, Zweige der Wissenschaft bevorzugt, auf denen der Verfasser oder seine Freunde gearbeitet haben. Beeinflußt ist diese Aufgabensammlung durch das bekannte sagenhafte „Schottische Buch" der Lemberger Mathematiker vor dem 2. Weltkrieg. *E. Hlawka*, Wien

Mathematische Gesetze der Logik. Band I: Vorlesungen über Aussagenlogik. Von *H. A. Schmidt.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 69.) Mit 24 Textabb., XXIV, 555 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. Gzln. DM 79.—.

Der Band beginnt mit einem Abschnitt über die Algebra der Logik; hier werden zunächst die Gesetze eines Booleschen Verbandes entwickelt; für den Booleschen Verband der Aussagen werden grundlegende Dinge, wie z. B. Netzinduktion oder Normalform, besprochen, dann wird seine Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Entscheidungsdefinitheit bewiesen; ein Kapitel dieses Abschnittes beschäftigt sich mit einer Logik, in der nur Implikation und Negation definiert ist. Der zweite Abschnitt führt in die wertende Logik ein: Es werden Wahrheitstafeln und Wahrheitsfunktionen erklärt und in Zusammenhang mit den logischen Verknüpfungen gesetzt, und die wichtigsten Typen von Wahrformen zusammengestellt; schließlich wird die für Unabhängigkeitsbeweise wichtige Methode der Quasiwahrheitswertung behandelt. Der dritte Abschnitt — „Grundlegende Begriffe zur deduktiven Logik" — bringt zunächst eine Erklärung des Begriffes „Kodifikat eines Wissensgebietes" und Bemerkungen über logische Kodifikate, worauf eine Darstellung der allgemeinen Syntax von Kodifikaten folgt. Speziell wird dann auf die Syntax aussagenlogischer Kodifikate eingegangen. In dem folgenden Abschnitt über normaldeduktive alternäre Aussagenlogik (ein logisches Kodifikat wird normaldeduktiv genannt, wenn seine elementaren Schlußregeln die Grundschlußregel und die Einsetzungsregel sind; alternär, wenn genau die einschlägigen Wahrformen beweisbar sind) werden die Axiomensysteme von *Whitehead-Russel*, *Frege-Lukasiewicz* und *Schütte* behandelt. Der fünfte Abschnitt über aufschichtende alternäre Aussagenlogik (ein logisches Kodifikat heißt aufschichtend, wenn seine elementaren Schlußregeln im Übergang zu Sätzen bestehen, welche die Prämissen als Teilgebilde enthalten) stellt vor allem eine Weiterentwicklung und Vereinfachung der Gentzen-Logik dar. Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit nichtalternären Kodifikationen der Aussagenlogik: Zuerst kommt ein Abschnitt über die normaldeduktive, derivative Aussagenlogik, der von der derivativen Implikationslogik ausgehend durch schrittweise Erweiterung schließlich zum Johanssonschen Minimalkalkül führt, dann wird die normaldeduktive intuitionistische

Aussagenlogik untersucht. Im Anschluß daran werden aufschichtende Kodifikate der derivativen und der intuitionistischen Aussagenlogik behandelt; im neunten Abschnitt wird für diese Logik ein handliches Entscheidungsverfahren entwickelt. In den beiden letzten Abschnitten wird ein aussagenlogisches Kodifikat aufgestellt, in dem die Modalitäten „Möglichkeit" und „Notwendigkeit" als zusammengesetzte aussagenlogische Verknüpfungen definiert werden; durch Hinzufügung zweier Axiome für diese Modalitäten erhält man ein entscheidungsdefinites Kodifikat, die „verschärfte strikte Logik".

Diese Inhaltsübersicht läßt wohl schon die Reichhaltigkeit des Bandes erkennen. Die wesentlichen Lösungen oder Lösungsversuche für die Hauptprobleme der Aussagenlogik werden sämtlich behandelt, und zwar durchwegs von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus; das Buch enthält dementsprechend in methodischer, aber auch in inhaltlicher Hinsicht viel Neues. Da es nicht nur für Mathematiker, sondern auch für die geisteswissenschaftlich orientierten Logiker bestimmt ist, ist die Darstellung besonders am Anfang sehr ausführlich. Die Grundgedanken der einzelnen Abschnitte werden dem Leser immer wieder in Erinnerung gebracht, zahlreiche Vor- und Rückverweisungen bewahren ihn davor, in der Fülle der Einzelheiten den Überblick über das Ganze zu verlieren.

Es ist zu wünschen, daß der zweite Band ebenso gut gelingen und in absehbarer Zeit erscheinen möge! *W. Nöbauer*, Wien

Beweistheorie. Von *K. Schütte.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 103.) X, 355 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 48.—.

Die von *Hilbert* begründete Beweistheorie stellt sich die Aufgabe, mathematische Theorien — welche dabei als formale Systeme betrachtet werden — im Hinblick auf gewisse Eigenschaften, wie z. B. Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Abgeschlossenheit zu untersuchen. Endziel dieser Theorie ist es nach *Hilbert*, „unsere üblichen Methoden der Mathematik samt und sonders als widerspruchsfrei zu erkennen". Als systematische Darstellung der Beweistheorie lag bisher vor allem das berühmte Werk von *Hilbert* und *Bernays* vor. Da seit dem Erscheinen des zweiten Bandes dieses Werkes (1939) auf dem Gebiet bedeutsame Fortschritte erzielt wurden, ist das vorliegende Buch sehr zu begrüßen; es stellt nämlich den heutigen Stand der Theorie in relativ einheitlicher Form dar und enthält auch manche Untersuchungen, die hier zum erstenmal veröffentlicht werden. Für seine Lektüre sind zwar keine speziellen Vorkenntnisse aus Mathematik oder formaler Logik erforderlich, wegen der schon an und für sich schwierigen Materie und der etwas komprimierten Darstellung ist das Buch aber nur für Leser geeignet, die sich in abstrakten Gedankengängen zurechtfinden können.

Der erste Teil bringt zunächst einen Abriß der Aussagenlogik; nach einer allgemeinen Besprechung formaler Systeme wird die Prädikatenlogik als spezielles formales System eingeführt und auf ihre syntaktischen und semantischen Eigenschaften hin untersucht; es folgt eine Darstellung der transfiniten Induktion und der Arithmetik der Ordnungszahlen, da diese Dinge später benötigt werden. Im zweiten Teil des Buches wird die beweistheoretische Untersuchung der Zahlentheorie vorgenommen: Zuerst wird die engere Zahlentheorie betrachtet und ihre Widerspruchsfreiheit nach *Gentzen* bewiesen; dann wird das System der Zahlentheorie durch Hinzunahme einer Schlußregel mit unendlich vielen Prämissen erweitert zu einem halbformalen System, das nicht nur widerspruchsfrei, sondern auch vollständig ist; das letzte Kapitel des zweiten Teiles beschäftigt sich mit der Herleitbarkeit der transfiniten Induktion in den Systemen der

Zahlentheorie. Im dritten Teil wird die Beweistheorie für höhere Systeme studiert: zunächst für eine typenfreie Logik, dann für die verzweigte Typenlogik, dann für Erweiterungen dieser beiden Systeme; in diesen Rahmen fällt auch die Aufstellung eines widerspruchsfreien Systemes für einen Teil der Analysis und die Erörterung der verschiedenen bisher unternommenen Versuche, sich mit nachweisbar widerspruchsfreien Systemen der klassischen Analysis zu nähern.

Es besteht kein Zweifel, daß sich der Verfasser mit diesem Buch um die mathematische Grundlagenforschung sehr verdient gemacht hat.

W. Nöbauer, Wien

Symbolic Logic. Von *C. I. Lewis* und *C. H. Langford*. (Dover Books on Mathematics.) Second Edition. Mit 8 Textabb., 518 S. New York: Dover Publications. 1959. $ 2.—.

Es handelt sich hier um einen Nachdruck der 1932 erschienenen ersten Auflage, ergänzt durch einen von *Lewis* geschriebenen Anhang von 12 Seiten, in dem einige neuere Ergebnisse zur Logik der „strict implication" kurz dargestellt werden. Das Buch, welches zunächst die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik behandelt, dann die Modalitätenlogik der strict implication entwickelt und schließlich nach einigen Untersuchungen über Vollständigkeit, Entscheidbarkeit und Widerspruchsfreiheit eine eingehende Diskussion der logischen Paradoxien durchführt, war zu seiner Zeit wohl eines der besten Werke auf diesem Gebiet; es wird auch heute noch dem Leser manche wertvolle Anregung vermitteln.

W. Nöbauer, Wien

Was sind und was sollen die Zahlen? Von *R. Dedekind*. Achte Auflage. XII, 47 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1960. Brosch. DM 3.80.

Die vorliegende Auflage ist ein unveränderter Nachdruck der bisherigen Ausgaben. Das Bändchen bringt die Begründung der Arithmetik durch *R. Dedekind* (1887) und gehört nach wie vor zum klassischen Bestand der Literatur über die Entstehung des modernen Zahlbegriffs.

K. Mayrhofer, Wien

Éléments d'Algèbre. Von *G. Julia*. (Cours de l'École Polytechnique.) Mit 8 Textabb., VIII, 207 S. Paris: Gauthier-Villars. 1959. Brosch. NF 38.—.

Ein recht ausführlicher und gut lesbarer Lehrgang der linearen Algebra, welcher auch manche Dinge enthält, die in den einschlägigen Büchern nur selten zu finden sind; er kann zur Einführung in das Gebiet bestens empfohlen werden.

Kurze Inhaltsübersicht: Nach einem vorbereitenden Kapitel über Gruppen, Ringe und Körper werden Vektorräume endlicher Dimension und ihre linearen Transformationen untersucht; das läuft natürlich hinaus auf eine Behandlung des Matrizenkalküls; bei dieser wird insbesondere auch die Reihe von *Liouville-Neumann* besprochen. Hierauf werden metrische Vektorräume betrachtet, das erfordert ein eingehenderes Studium der unitären und der hermiteschen Matrizen insbesondere wird hier auch die Extremwertmethode zur Reduktion der hermiteschen Formen dargestellt. Das Schlußkapitel bringt die Elemente der Tensoralgebra.

W. Nöbauer, Wien

Boolean Algebras. Von *R. Sikorski*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 25, Reihe: Reelle Funktionen.) IX, 176 S. Berlin Göttingen Heidelberg: Springer Verlag. 1960. Brosch. DM 39.60.

Unter einer Booleschen Algebra versteht man bekanntlich einen komplementären distributiven Verband. Die Theorie der Booleschen Algebren ist von großer Bedeutung für verschiedene Teilgebiete der Mathematik, zum Beispiel für die Mathematische Logik oder für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine eingehende Kenntnis dieser Theorie ist daher für jeden Mathematiker wünschenswert. Der vorliegende Band gibt beste Gelegenheit, sich mit den Booleschen Algebren vertraut zu machen, denn er stellt die Theorie von Grund auf ausführlich und mit vollständigen Beweisen dar, skizziert auch das Prinzipielle der wichtigen Anwendungen und bringt ausführliche Literaturhinweise.

Das Buch besteht aus zwei Kapiteln und einem Anhang. Im ersten Kapitel werden nur endliche Vereinigungen und Durchschnitte betrachtet und die grundlegenden Begriffe, wie Ideal, Filter, Homomorphismus, Isomorphismus, Atom, Teilalgebra, Faktoralgebra, freie Algebra, direkte Vereinigung, sowie die auf diese Begriffe bezüglichen Sätze behandelt, es wird hier aber auch der Zusammenhang der Booleschen Algebren mit den Mengenkörpern und den Booleschen Ringen besprochen. Im zweiten werden auch Vereinigungen und Durchschnitte von unendlich vielen Elementen studiert; in den Untersuchungen dieses Kapitels spielen insbesondere der Begriff der m-vollständigen Booleschen Algebra — das ist eine Boolesche Algebra, bei der für jede Teilmenge der Algebra mit Kardinalzahl m Vereinigung und Durchschnitt existiert — sowie der Begriff der vollständigen Booleschen Algebra eine große Rolle. Im Anhang schließlich wird auf die Anwendung der Theorie in anderen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Mathematischen Logik, der Maßtheorie, der Theorie der reellen Funktionen und der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen. *W. Nöbauer*, Wien

An Introduction to the Theory of Numbers. Von *G. H. Hardy* und *E. M. Wright*. Fourth Edition. Mit 11 Textabb., XVI, 421 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1960. Geb. 42/— net.

Die vierte Auflage unterscheidet sich von der dritten nur durch kleine Änderungen und Ergänzungen. Daher kann ich auf die ausführliche Besprechung der dritten Auflage in dieser Zeitschrift Mh. Math. **60**, 84 (1956) hinweisen.
N. Hofreiter, Wien

The Solution of Equations in Integers. Von *A. O. Gelfond*. (Popular Lectures on Mathematics.) Nach der 2. russischen Auflage ins Englische übersetzt von *L. F. Boron*. 72 S. Groningen: P. Noordhoff. 1960. Brosch. Dfl. 3.75; $ 1.—.

Ich verweise auf die Besprechung der deutschen Übersetzung in dieser Zeitschrift Mh. Math. **59**, 66 (1955). *N. Hofreiter*, Wien

Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen. Von *C. L. Siegel*. (Publications of the Mathematical Society of Japan: No. 5.) IX, 69 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan. 1959.

Die verschiedenen Bereiche, welche in der Theorie der quadratischen Formen auftreten, sind im allgemeinen nicht kompakt, und es ist daher eine fundamentale Aufgabe, diese Bereiche durch Hinzufügung von idealen Punkten zu kompaktifizieren. Man denke nur an den Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe. Es gelingt nun dem Verfasser in diesem hochbedeutenden Werk, die Bereiche durch Heranziehung von entsprechenden Riemannschen Metriken zu kompaktifizieren, wobei sich herausstellt, daß die Darstellungen der Null durch die entsprechende (indefinite) quadratische Form in engstem Zusammenhang

zu den verschiedenen unendlich fernen Teilen des zugehörigen Bereiches stehen. Die Darstellung, aus Vorträgen hervorgegangen, ist, wie bei diesem Verfasser ja wohl bekannt, außerordentlich klar. Man kann den Entwicklungen leicht folgen. Natürlich setzt die Lektüre dieses Buches die Kenntnis der Theorie der quadratischen Formen voraus. Sehr lesenswert ist das Vorwort, wo der Verfasser seine Ansichten über den mathematischen Stil klarlegt.

E. Hlawka, Wien

An Introduction to the Geometry of Numbers. Von *J. W. S. Cassels*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 99.) Mit 12 Textabb., VIII, 344 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 64.50; Gzln. DM 69.—.

In einer Vorrede wird am Beispiel des Kreises die Problemstellung der Geometrie der Zahlen erörtert. Kapitel I, Gitter, bringt zunächst die Grundtatsachen über Gitterbasen und Teilgitter. Schon auf Seite 16 begegnet man jedoch einem Satz von *Davenport* aus dem Jahre 1955. Kapitel II, Reduktion, behandelt die Minima von Formen. Vor allem binäre und ternäre quadratische und kubische Formen werden untersucht. Der Autor erklärt, warum bei indefiniten Formen isolierte Minima zu erwarten sind. Kapitel III, Sätze von *Blichfeldt* und *Minkowski*, bringt nach dem Beweis der Hauptsätze Verallgemeinerungen von *Siegel* und *R. Rado*. Anschließend wird die Mordellsche Methode an drei Beispielen auseinandergesetzt. In Kapitel IV, Distanzfunktionen, werden die Eigenschaften der Distanzfunktionen von Sternkörpern und konvexen Körpern untersucht. Hier und fast überall im Buch sind die betrachteten Körper offen. Kapitel V, Der Mahlersche Auswahlsatz. Hier wird u. a. die Existenz kritischer Gitter für Sternkörper nachgewiesen. Das Kapitel schließt mit einem Davenportschen Satz über den Zusammenhang zwischen Problemen der Geometrie der Zahlen und der Diophantischen Approximation. In Kapitel VI, Der Satz von *Minkowski Hlawka*, wird, wie das in einem Lehrbuch kaum anders möglich, an Stelle des Siegelschen Maßes ein elementarer Mittelwertbegriff benützt. Die für große n beste Verschärfung des Satzes von *Minkowski Hlawka*, nämlich $V(S)/\Delta(S) \geqq n$ const, konnte wegen der Länge der Beweise nur erwähnt werden; ein schwächeres Ergebnis wird jedoch bewiesen. Ein vom Verfasser gegebener Beweis einer Vermutung von *Rogers* wird dargestellt. Kapitel VII, Der Quotientenraum, ist eingeschoben, da sich dieser Begriff in Kapitel VIII, Höhere Minima, und in Kapitel IX als nützlich erweist. In Kapitel IX, Lagerungen, wird der Zusammenhang zwischen dichtester gitterförmiger Lagerung konvexer Körper mit ihrer kritischen Determinante aufgedeckt. Eigenschaften von Maximalkörpern werden angegeben. Der Satz von *Hajos* wird angeführt, aber nicht bewiesen. In Kapitel X, Automorphismen, wird u. a. die Isolationsmethode auseinandergesetzt, Kapitel XI, Inhomogene Probleme, bringt Übertragungssätze und Sätze in Richtung der Vermutung von *Minkowski* über Produkte inhomogener linearer Formen.

Diese kurze Übersicht wird der Fülle des Gebotenen kaum gerecht. Der Autor, welcher an den Fortschritten der Geometrie der Zahlen in den letzten Jahren maßgeblich beteiligt ist, bringt für ein Lehrbuch ungewöhnlich viele Literaturhinweise. Trotz der Verarbeitung vieler neuester Ergebnisse, und trotz der vielen referierenden Hinweise auf weitere Begriffe und Sätze, ist das Buch klar geschrieben. Auch wer sich schon seit einiger Zeit mit dem Gegenstand beschäftigt hat, wird aus dem Buche viele Anregungen schöpfen. *W. Schmidt*, Wien

Die Methode der vollständigen Induktion. Von *I. S. Sominski.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: III.) Übersetzung aus dem Russischen. Zweite, durchgesehene Auflage. 55 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Brosch. DM 2.—.

Da sich die neue Auflage nur wenig von der ersten unterscheidet, so verweise ich auf die Besprechung in Mh. Math. **59**, 69 (1955). *N. Hofreiter*, Wien

A Primer of Real Functions. Von *R. P. Boas, Jr.* (The Carus Mathematical Monographs: Number 13.) XIII, 189 S. Published by the Mathematical Association of America. New York: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 4.—.

Das vorliegende Buch stellt sich die Aufgabe, eine Einführung in die Theorie der reellen Funktionen zu geben. Man wird bei diesem Verfasser eine sehr originelle Darstellung erwarten und wird in dieser Hinsicht nicht enttäuscht. Es ist vielleicht kein systematisches Lehrbuch, sondern der Verfasser greift Gegensätze auf und wendet sie dann auf interessante Probleme und Sätze an, die nicht allgemein bekannt sind, und berücksichtigt dabei oft modernste Literatur. Der Stil ist ein lebhafter, manchmal sogar witziger, und der Referent ist überzeugt, daß dieses Büchlein einen bequemen, kurzweiligen Zugang zur Theorie der reellen Funktionen bildet. *E. Hlawka*, Wien

Normierte Algebren. Von *M. A. Neumark.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 45.) Übersetzung aus dem Russischen. Mit 4 Textabb., 572 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 48.—.

Diese Buch ist die deutsche Übersetzung eines 1956 in Rußland erschienenen bekannten Werkes. Die beiden ersten Kapitel bringen eine ausführliche Darstellung der Grundlagen der Funktionalanalysis: *Banach*sche und *Hilbert*sche Räume, die moderne Integrationstheorie für Funktionen auf einem lokal kompakten Raum und schließlich normierte, insbesondere *Banach*sche Algebren. In der Theorie der *Banach*schen Algebren sind hauptsächlich zwei große Klassen wichtig: die symmetrischen, d. h. solche, in denen eine Involution $x \to x^*$ definiert ist, und die kommutativen. Die kommutativen Algebren werden im 3. Kapitel behandelt (*Gelfand*sche Theorie, Untersuchungen von *Schilow*, Satz von *Gelfand-Neumark* über die abstrakte Charakterisierung der Algebren der stetigen Funktionen auf kompakten Räumen). Den symmetrischen Algebren und ihrer Darstellungstheorie ist das 4. Kapitel gewidmet. Hier findet man die grundlegenden und eleganten Methoden von *Gelfand-Neumark* (Spektralzerlegung eines beschränkten Hermiteschen Operators, Vollständigkeit der irreduziblen Darstellungen einer symmetrischen Algebra), *Godements* abstrakte Verallgemeinerung des *Plancherel*schen Satzes und *Neumark*s Verallgemeinerungen des *Schur*schen Lemmas auf Operatoren im *Hilbert*schen Raum. Im 5. Kapitel werden spezielle Algebren betrachtet, insbesondere die, die mit den beschränkten Operatoren zusammenhängen (Struktursatz von *Gelfand-Neumark*, duale Algebren). Die *Banach*schen Algebren stehen in engem Zusammenhang mit der Gruppentheorie, und zwar einerseits mit der Theorie der Darstellungen allgemeiner lokal kompakter Gruppen durch unitäre Operatoren, andererseits mit der harmonischen Analyse auf Abelschen lokal kompakten Gruppen. Dieser ganze Ideenkreis wird im 6. Kapitel von Anfang an entwickelt: Topologische Gruppen, *Haar*sches Integral auf lokal kompakten Gruppen G, die „Gruppenalgebra" $L^1(G)$, Darstellungstheorie (Vollständigkeitssatz von *Gelfand-Raikow*, positiv definite Funktionen). In der harmonischen Analyse, die hier als Anwendung der Theorie

der normierten Algebren erscheint, wird der Satz von *Bochner* an die Spitze gestellt und dann der Umkehrsatz für die *Fourier*transformierte, der Satz von *Plancherel* und schließlich der *Pontrjagin*sche Dualitätssatz bewiesen. Auch der Satz von *Wiener* und seine Verallgemeinerung wird gebracht. Die Dualitäts- und Darstellungstheorie für allgemeine kompakte Gruppen wird ausführlich behandelt. Das 7. Kapitel beschäftigt sich mit der von *Murray* und *v. Neumann* entwickelten Theorie der Operatorenalgebren; im letzten, 8. Kapitel wird dann das schwierige Problem der Zerlegung solcher Algebren in irreduzible Algebren behandelt, das für die Darstellungstheorie der nicht-Abelschen lokal kompakten Gruppen wichtig ist.

Das Buch zeichnet sich durch eine einfache, gründliche und dabei elegante Darstellung aus, die das wesentliche klar hervortreten läßt, und enthält auch viele Beispiele aus der Analysis und Gruppentheorie, die von selbständigem Wert sind. Übersetzung und Druck sind vortrefflich; der deutsche Text weist gegenüber dem Original einige Verbesserungen mathematischer Natur sowie ein zusätzliches Literaturverzeichnis auf, Allerdings sind die Quellenangaben im Text oft mangelhaft, wenn es sich um nichtrussische Mathematiker handelt. So werden z. B. bei der Darstellung der Integrationstheorie weder *Stone* noch *Bourbaki* erwähnt, ebensowenig bei der harmonischen Analyse die Arbeiten von *Kaplansky*, *Helson* u. a. Es sei übrigens bemerkt, daß in der harmonischen Analyse die tieferen Methoden von *A. Weil* außerhalb des hier gesteckten Rahmens bleiben. Das Buch ist, alles in allem, ein Standardwerk von internationalem Format, zur Einführung und zum Spezialstudium hervorragend geeignet. Die deutsche Ausgabe wird sicher viel zur weiteren Verbreitung der Funktionalanalysis beitragen. *H. Reiter*, dzt. Newcastle

Advanced Engineering Mathematics. Von *C. R. Wylie, Jr.* Second Edition. Mit 192 Textabb., XI, 696 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1960. Geb. 70 s.

Ziel des Buches ist, den Ingenieuren, Physikern und angewandten Mathematikern eine Einführung in jene Zweige der Mathematik zu geben, die sie brauchen. Eine gründliche Kenntnis der Differential- und Integralrechnung wird vom Leser verlangt. Die Darstellung ist ausführlich und klar. Wenn man bedenkt, daß das Buch in erster Linie für solche geschrieben ist, für die Mathematik nur Hilfswissenschaft ist, so staunt man über die viele Theorie. Natürlich konnten nicht alle Sätze bewiesen werden. Sie werden aber durch einwandfreie Überlegungen verständlich gemacht. Über 1000 Aufgaben dienen zur Einübung. Auf die zahlreichen Anwendungen sei besonders hingewiesen. Sehr zweckmäßig ist die Stoffauswahl. Das Buch enthält: Lineare Algebra, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Differenzengleichungen, Fourier-Reihen und -Integrale, Laplace-Transformationen, Vektoranalysis, praktische Mathematik und Funktionentheorie. Die zweite Auflage ist gegenüber der ersten stark erweitert und stellt eine neue Bearbeitung dar. *N. Hofreiter*, Wien

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Von *L. Heffter*. Zweite wesentlich verbesserte Auflage. Mit 13 Textabb., VIII, 64 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Brosch. DM 19.80.

Der Verfasser legt erneut seine Gedanken zum Cauchyschen Integralsatz dar, bespricht dabei auch ausführlich die anderen Beweise. Besonders instruktiv ist auch der geschichtliche Anhang, wo der Verfasser die verschiedenen Wege,

die zum Cauchyschen Integralsatz führen, kritisch auseinandersetzt. Man kann dem hochverdienten Verfasser für dieses vorliegende Büchlein nur dankbar sein. Man vergleiche auch die Besprechung der ersten Auflage in dieser Zeitschrift Mh. Math. **59**, 340 (1955). *E. Hlawka*, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Teil III. Von *I. I. Priwalow.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 23.) Übersetzung aus dem Russischen. Mit 57 Textabb., V, 188 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 12.90.

Die ersten beiden Teile wurden in dieser Zeitschrift Mh. Math. **63**, 195 (1959); **64**, 88 (1960) besprochen. Es wurde festgestellt, daß die Bücher ob ihrer klaren Darstellung als Lehrbücher sehr gut geeignet sind. Dies gilt auch vom dritten Teil. Er besteht aus drei Abschnitten. Der erste ist den elliptischen Funktionen gewidmet. Es werden die Weierstraßschen und die Jacobischen Funktionen und die Thetafunktionen gebracht. Der zweite Abschnitt bringt die allgemeinen Prinzipien der Theorie der konformen Abbildung. Dazu gehören das Spieglungsprinzip, das Schwarzsche Lemma und der Riemannsche Abbildungssatz. Der dritte Abschnitt handelt von den allgemeinen Eigenschaften der einblättrigen Funktionen. *N. Hofreiter*, Wien

Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Band I: Holomorphic Functions. Von *G. Sansone* und *J. Gerretsen.* Mit 91 Textabb., XVI, 488 S. Groningen: P. Noordhoff. 1960. Brosch. Dfl. 45.—; $ 12.—. Geb. Dfl. 48.75; $ 13.—.

Das vorliegende Buch ist ein großangelegtes Werk über Funktionentheorie, und zwar liegt hier zunächst der erste Band, holomorphe Funktionen, vor. Der besondere Zug dieses ersten Bandes, der sich nur mit den eindeutigen Funktionen beschäftigt, ist die ausführliche Darstellung der speziellen Funktionen, wie Gammafunktionen, elliptische Funktionen, ganze Funktionen von endlicher Ordnung, *Dirichlet*-Reihen, Zetafunktion von *Riemann* mit Anwendung auf den Primzahlsatz, das Laplacesche Integral. Es wird auch eingegangen auf asymptotische Entwicklungen und die Sattelpunktsmethode, um nur einige Dinge herauszugreifen. Das vorliegende Werk enthält eine Fülle von interessanten Einzelheiten und sehr schöne Beweiswendungen. Der Cauchysche Integralsatz wird nach einer Vorlesung von *Artin* in Notre Dame behandelt. Die Darstellung ist im allgemeinen sehr klar und bemüht sich um Strenge. (Eine Ausnahme scheint mir allerdings der Beweis des Additionstheorems der *pe*-Funktion darzustellen, welchen der Referent nicht einsehen konnte.) Man kann auf den zweiten Band gespannt sein. Das Buch kann wärmstens empfohlen werden.
E. Hlawka, Wien

Complex Variables and Applications. Von *R. V. Churchill.* Second Edition. Mit 138 Textabb., IX, 297 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. 1960. Geb. 52 s. 6 d.

Das vorliegende Buch, verfaßt von dem bekannten Verfasser, ist aus Vorlesungen an der Universität von Michigan hervorgegangen und stellt eine gute Einführung in die Funktionentheorie dar. Rein theoretische Dinge werden kürzer besprochen. Es ist natürlich vor allem gedacht für Physiker und Techniker, kann aber auch Mathematikern sehr empfohlen werden. Besondere Berücksichtigung findet die konforme Abbildung und die Anwendung der Theorie auf

Potentialtheorie. Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang das 11. Kapitel, welches sich mit der Poissonschen Integralformel beschäftigt.

E. Hlawka, Wien

Funkcje Analityczne. Von *St. Saks* und *A. Zygmund*. (Monografie Matematyczne: Band 10.) Dritte Auflage. VIII, 431 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1959. Geb. zl. 45.—.

Dies ist die dritte — gegenüber der zweiten unveränderte — Auflage des bekannten Werkes, welches auch nach wie vor sowohl für den Studierenden, als auch für den, der Vorlesungen über Funktionentheorie halten muß, ein unentbehrlicher Ratgeber ist. Für eine ausführliche Besprechung der zweiten Auflage vergleiche man Mh. Math. **57**, 352 (1954). *K. Prachar*, Wien

Theory of Differential Equations. Band I: Exact Equations and Pfaff's Problem. Band II und Band III: Ordinary Equations, Not Linear. Band IV: Ordinary Linear Equations. Band V und Band VI: Partial Differential Equations. Von *A. R. Forsyth*. Neudruck der letzten Auflagen. XIII, 340 S. + XI, 344 S.; X, 391 S. + XVI, 534 S.; XX, 478 S. + XIII, 596 S. New York: Dover Publications. 1959. 6 Bände in 3 gebunden $ 15.—.

Für viele Bibliotheken ist es sehr erfreulich, daß das Standardwerk von *Forsyth* über Differentialgleichungen, das seit langem vergriffen war, wieder erschien und außerordentlich preiswert zu kaufen ist. Das seinerzeit aus 6 Bänden bestehende Werk wurde nun in 3 Bänden herausgegeben. Die Ausgabe ist ungekürzt und umfaßt insgesamt 2766 Seiten. Es ist das umfangreichste Werk, das je über Differentialgleichungen geschrieben wurde. Die Bücher, die 1890 bis 1906 herauskamen, konnten auch damals keine vollständige Behandlung der Differentialgleichungen darstellen. Sie bringen das Pfaffsche Problem (1. Teil), die funktionentheoretische Behandlung der Lösungen von nicht-linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen (2. Teil), lineare gewöhnliche Differentialgleichungen (3. Teil) und Existenzbeweise, Lösungsmethoden und Eigenschaften der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen (4. Teil). Der Autor war mit Erfolg bemüht, wenigstens die behandelten Teile sehr umfassend darzustellen und der historischen Entwicklung Rechnung zu tragen. *N. Hofreiter*, Wien

Differentialgleichungen für Ingenieure. Eine Einführung. Von *L. Collatz*. (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik: Band 1.) Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 115 Textabb., 197 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1960. Geb. DM 21.60.

Ingenieure, Physiker und angewandte Mathematiker werden es sehr begrüßen, daß das Buch des Verfassers in zweiter, stark erweiterter Auflage erschienen ist. Die erste Auflage war leider schon lange vergriffen. Als einführendes Lehrbuch muß es inhaltlich weitgehend im üblichen Rahmen verlaufen. Es enthält daher: gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, lineare Differentialgleichungen, Systeme von linearen Differentialgleichungen, Rand- und Eigenwertaufgaben, Differentialgleichungen, die zu Kugel-, Zylinder- und hypergeometrischen Funktionen führen, und Näherungsverfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Darstellung befriedigt in ihrer Strenge auch die Mathematiker. Andererseits ist sie dem Denkvermögen der angehenden Ingenieure und Physiker angepaßt. Die anschauliche Seite und die Beziehungen zu den Anwendungsgebieten werden stets stark betont. Eine große Anzahl von

Aufgaben wird besonders die angehenden Ingenieure interessieren. Was die Beweismethoden betrifft, so möchte ich die noch nicht allgemein übliche Verwendung der Matrizen bei Systemen von Differentialgleichungen und die Benutzung einfacher Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis bei Eigenwertaufgaben hervorheben. *N. Hofreiter*, Wien

The Numerical Treatment of Differential Equations. Von *L. Collatz*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 60.) Third Edition. Nach einer ergänzten Fassung der 2. deutschen Auflage ins Englische übersetzt von *P. G. Williams*. Mit 118 Textabb. und 1 Portrait, XV, 568 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 93.60; Gzln. DM 98.—.

Die dritte Auflage ist, abgesehen von einigen Änderungen und Zusätzen, eine Übersetzung der zweiten in deutscher Sprache erschienenen Auflage. Ich verweise auf die ausführlichen Besprechungen der 1. und 2. Auflage in dieser Zeitschrift Mh. Math. **55**, 356 (1951), **59**, 341 (1955). *N. Hofreiter*, Wien

Confluent Hypergeometric Functions. Von *L. J. Slater*. Mit 23 Textabb., XI, 247 S. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. 65/— net.

Alle mathematischen Physiker wissen, was konfluente hypergeometrische Funktionen sind, und kennen auch ihre Bedeutung. Sie werden es begrüßen, daß diesen Funktionen nicht bloß ein oder zwei Kapitel eines Werkes gewidmet werden, sondern ein ganzes Buch. Der erste Teil ist der Theorie vorbehalten, also den wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen. Dazu gehören: analytisches Verhalten, Additions- und Multiplikationstheoreme, Rekursionsformeln, Verteilung der Nullstellen, Differentiationen, Integraldarstellungen, Integrale solcher Funktionen. Ausführlich werden asymptotische Entwicklungen solcher Funktionen besprochen. Der zweite Teil bringt Tafeln, und zwar eine Tafel der kleinsten positiven Nullstellen von ${}_1F_1\,[a; b; x]$ und Tafeln für diese Funktion über Bereiche, wie sie in den Anwendungen meist vorkommen. Es sind die bisher vollständigsten Tafeln. *N. Hofreiter*, Wien

Grundzüge der Mathematik. Für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band II: Geometrie. Auf Veranlassung des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission herausgegeben von *H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt* und *W. Süss*. Mit 358 Textabb., XVI, 646 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1960. Geb. DM 59.—.

Das vorliegende Buch enthält folgende Kapitel: *H. Freudenthal-A. Baur*, Geometrie — phänomenologisch. *W. Klingenberg-A. Baur*, Axiomatische Grundlage der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. *F. Bachmann-H. Wolff-A. Baur*, Spiegelungen. *R. Lingenberg-A. Baur*, Der synthetische und analytische Standpunkt in der Geometrie. *W. Breitenbach-W. Süss*, Geometrische Konstruktionen. *J. Gerretsen-P. Vredenduin*, Polygone und Polyeder. *H. Gericke-F. Raith*, Vektoren und Trigonometrie. *G. Pickert-R. Stender-M. Hellwich*, Projektive, affine und metrische Geometrie. *W. Burau-A. Baur*, Algebraische Geometrie. *W. Süss-K. Fladt*, Kleins Erlanger Programm. *H. Freudenthal-H. G. Steiner*, Gruppentheorie und Geometrie. *F. Hohenberg-J. Tschupik*, Grundzüge der darstellenden Geometrie. Kurven und Flächen: a) *W. Süss-H. Gericke-K. H. Berger*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie. b) *W. Süss-U. Viet-K. H. Berger*, Konvexe Figuren. *K. H. Weise-H. Noack*, Ausgewählte Fragen der Topologie.

Der vorliegende Band scheint mir besonders geglückt zu sein, denn diese Einführung in die Geometrie ist nicht nur für die Lehrer an Oberschulen, für die ja das Buch in erster Linie bestimmt ist, sondern auch vor allem für die Studierenden, aber sogar für den Hochschullehrer geeignet, denn — um nur ein Beispiel herauszugreifen — das zweite und dritte Kapitel macht den Nichtfachmann vertraut mit der Weiterentwicklung der Axiomatik der Geometrie seit dem berühmten Werk von *Hilbert*. Überhaupt scheinen mir diese Kapitel besonders gelungen und auch für den Arbeitsunterricht an Oberschulen gut geeignet, wie für eine Einführung in die Axiomatik an der Hochschule. Jeder, der Vorlesungen über analytische Geometrie zu halten hat, wird vor allem aus dem siebten und achten Kapitel großen Nutzen ziehen. Sehr elegant sind auch die Kapitel über das Erlanger Programm von *Felix Klein*, zunächst in elementarer Form von *Fladt* und in höherer Form von *Freudenthal*. Allerdings wird der Artikel von *Freudenthal* dem Leser große Schwierigkeiten bieten, aber diese Mühe wird belohnt. Der Artikel über die darstellende Geometrie greift in schöner Weise das Grundsätzliche heraus und bringt auch eigene Untersuchungen der Verfasser. Der Artikel über Differentialgeometrie geht auch — wenn auch kurz — auf die Cartansche Methode ein. Besonders hervorzuheben ist der Artikel über die konvexen Figuren, der auch viel Neues enthält und deutlich die Hand von *W. Süss* zeigt. Gerade die konvexen Figuren wären ein dankbares Kapitel für den Arbeitsunterricht an Oberschulen, da sie keine Vorkenntnisse erfordern und rasch zu interessanten und nicht trivialen Fragestellungen führen. Auf die Kapitel über geometrische Konstruktionen, Polygone und Polyeder, und algebraische Geometrie, welche eine Einführung an Beispielen in dieses Gebiet gibt, und auf die Einführung in die Topologie sei nur hingewiesen. Das Buch kann wärmstens empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie. Von *H. Meschkowski*. Mit 45 Textabb., VIII, 168 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1960. Geb. DM 19.80.

H. Meschkowski ist Professor an der Pädagogischen Hochschule in Berlin und von dort mag auch die Anregung gekommen sein, diese Darstellung über — zumindest der Fragestellung nach — elementare Probleme der Geometrie zu schreiben, die teils prinzipiell unlösbar sind teils bisher ungelöste Fragen betreffen. Unter Ausschaltung der klassischesten Probleme dieser Art, nämlich des Parallelenproblems und des Quadraturproblems, für die eine Fülle anderer Darstellungen existieren, werden vor allem die Arbeitsmethoden entwickelt, die zur Lösung der betrachteten geometrischen Problemarten geeignet sind. Da dieses Buch auch für den interessierten Nichtmathematiker geschrieben und verständlich ist, sind besonders an jenen Stellen Warnungstafeln aufgestellt, wo trotz Bestehens eines Unmöglichkeitsbeweises mancher Leser seine Zeit im Suchen eines Lösungsweges verschwenden könnte.

Unter Verwendung von 45 Textabbildungen und reicher Anführung von Literatur werden folgende Hauptprobleme besprochen: reguläre und irreguläre Lagerungen in der Ebene und auf der Kugel, Zerlegungsprobleme sowie mengengeometrische Problemstellungen im Anschluß an einen Satz von *Hausdorff*, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Von besonderem Interesse ist der letzte Abschnitt, der sich mit der methodischen Bedeutung unlösbarer Probleme beschäftigt und hoffentlich dazu beitragen wird, Nichtmathematikern die Existenz von Unmöglichkeitsbeweisen nahezubringen. *H. Brauner*, Wien

Geometrie als Sprache der Formen. Von *H. v. Baravalle*. Mit 411 Textabb., 143+96 S. Freiburg i. Br.: Novalis-Verlag. 1957. Geb. DM 32.—.

Der Schönheit geometrischer Formen der Ebene könnte dieses Buch für Jedermann gewidmet sein. Unbeschwert von axiomatischen und mathematisch-formelmäßigen Gesichtspunkten werden gewisse Gebiete der ebenen Geometrie vorgeführt, jeweils ausgehend von möglichst regulären Formen. Diesen kommen in besonderer Weise gestaltliche Gesetzmäßigkeiten zu; sie werden jedoch nicht als Sonderfälle allgemeiner Formen sondern aus Grundgestalten eingeführt, aus denen die übrigen durch verschiedene Veränderungen gewonnen werden. So finden sich Dreiecke, Vierecke, Vielecke und Kreisfiguren behandelt, aber auch Spiralen, Konchoiden, Kegelschnittlinien und Flächenverwandlungen; etwas weiter führen die Abschnitte über projektive Geometrie, Inversion und Evoluten. Die 411 am Schluß des Buches zusammengefaßten großen Figuren sind in durchwegs hervorragendem Stile ausgeführt und tragen wesentlich zum ästhetischen Genuß bei der Lektüre dieses unterhaltsamen Buches bei.

H. Brauner, Wien

Darstellende Geometrie nach dynamischer Methode. Von *H. v. Baravalle*. Mit 167 Textabb., 55+32 S. Freiburg i. Br.: Novalis-Verlag. 1959. Geb. DM 19.—.

Dieses offensichtlich für den mathematischen Laien bestimmte Buch gibt in ansprechendem Plauderton eine erste Orientierung über die Auf- und Grundrißmethode, wobei nicht das Projizieren an den Anfang gestellt wird, sondern vielmehr ein vom Verfasser als „Begleitbewegung" bezeichneter Vorgang. Diese Begleitbewegung, deren Wesen an Hand einiger Beispiele eingeführt wird, ist eine Bewegung in der Zeichenebene, die mit einer den abzubildenden Körper abtastenden dreidimensionalen Bewegung so gekoppelt ist, wie etwa „die Bewegung eines Flugzeuges mit seinem Schatten". Ob jedoch mit dieser Begriffsbildung irgend etwas methodisch oder sachlich Zweckmäßiges oder gar Neues gewonnen werden kann, muß der Besprecher bezweifeln. In demselben Sinn ist etwa folgender Satz problematisch: „Bei der Darstellenden Geometrie (gemeint ist offenkundig Auf- und Grundrißmethode) wird man sich vom Gebiet des Sehens soweit wie möglich fernhalten; man wird dafür den Weg in Anlehnung an Tasten und Mitbewegen aufbauen."

Auf 53 Textseiten wird dann über ebenflächige Körper, insbesondere die Platonischen, ebene Schnitte, krumme Flächen, Durchdringungen, perspektivische und stereoskopische Abbildung erzählt, ergänzt durch 167 Textfiguren von größtenteils guter Qualität.

H. Brauner, Wien

Einführung in die Differentialgeometrie. Von *W. Blaschke* und *H. Reichardt*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 58.) Zweite Auflage. Mit 57 Textabb., VII, 173 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 24.—; geh. DM 19.80.

Gegenüber der ersten Auflage, besprochen in dieser Zeitschrift Mh. Math. **54**, 259 (1950), unterscheidet sich die vorliegende zweite Auflage vor allem zunächst im Hauptteil in Einzelheiten und durch Berücksichtigung der neueren Literatur. Hinzugekommen ist ein neues Kapitel von *H. Reichardt* „*n*-dimensionale Differentialgeometrie". Die Entwicklungen in diesem Kapitel sind natürlich bedeutend allgemeiner und abstrakter als der Text des Hauptteiles, wie es eben der Sache entspricht. Ein Anhang enthält noch Anmerkungen von *A. P. Norden*,

welcher die erste Auflage des vorliegenden Buches ins Russische übersetzt hat. Das vorliegende Buch ist wohl die beste Einführung in die Cartansche Methode der Differentialgeometrie. *E. Hlawka*, Wien

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. I. Teil: Tensoralgebra. Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*. Vierte ergänzte Auflage. Mit 34 Textabb., VIII, 171 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Steif geheftet S 144.—; DM 24.—; sfr. 24.60; $ 5.70; £ 2.1.od.

Als die erste Auflage 1946 erschien, haben auch Optimisten nicht erwartet, daß eine vierte Auflage bereits im Jahre 1959 notwendig werde. In dem Buch hatten sich die Autoren die Aufgabe gestellt, den vielen Büchern über Vektorrechnung in der symbolischen Schreibweise ein Werk gegenüberzustellen, das die Tensorrechnung einschließlich der Vektorrechnung auf der analytischen Darstellung aufbaut. Die erste Auflage wurde in dieser Zeitschrift Mh. Math. **52**, 86 (1948) ausführlich besprochen. Die weiteren Auflagen brachten wenig Änderungen. Auch die vorliegende vierte Auflage unterscheidet sich von früheren nur um Zusätze, die Brücken zur symbolischen Schreibweise schlagen.

N. Hofreiter, Wien

Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Von *G. Ringel*. (Mathematische Monographien: Band 2.) Mit 77 Textabb., VIII, 132 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 18.—.

Das Buch ist eine gute und übersichtliche Zusammenstellung alles Wesentlichen, das heute über den Komplex der sogenannten Färbungsprobleme bekannt ist. Obwohl die klassische Aufgabe dieser Art, das Vierfarbenproblem, noch immer ungelöst ist, bietet das Buch eine wahre Fülle anregender Methoden und bemerkenswerter Resultate. Da, wie es üblich ist, weitgehend Graphen verwendet werden, beginnt der Autor mit einer Einführung in die Graphentheorie. Der Stil lehnt sich dabei stark an die Sprache an, wie sie *Dénes König* in seiner Theorie der endlichen und unendlichen Graphen verwendet hat. Wegen der stets gewahrten Anschaulichkeit der Darstellung und wegen der Tatsache, daß vom Leser Interesse und mathematisches Denkvermögen, aber fast keine Vorkenntnisse verlangt werden, eignet sich der Band sehr gut als einführendes Lehrbuch. Trotzdem wird es auch dem Fachmann manches Neue bieten können. Die zahlreichen Abbildungen tragen viel zum leichten Verständnis bei; ein ausführliches Literaturverzeichnis und ein Namen- und Sachverzeichnis vervollständigen das Werk und erleichtern seine Verwendung. Vielleicht wäre es von Vorteil gewesen, noch ein alphabetisches Verzeichnis der verwendeten Symbole hinzuzufügen. *H. Izbicki*, Wien

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von *B. W. Gnedenko* und *A. J. Chintschin*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: VIII.) Übersetzung aus dem Russischen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 16 Textabb., 135 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Brosch. DM 4.50.

Da sich die neue Auflage nur wenig von der ersten unterscheidet, so verweise ich auf die ausführliche Besprechung in Mh. Math. **59**, 245 (1955).

N. Hofreiter, Wien

Theory of Probability. Von *W. Burnside.* (Dover Books on Mathematics.) Neudruck der Auflage von 1928. XXX, 106 S. New York: Dover Publikations. 1959. $ 1.—.

Das nach dem Tod des Verfassers von *Forsyth* im Jahre 1928 herausgegebene Büchlein wurde um 1925 geschrieben; es zeigt deutlich, wie sehr sich der damalige Stand der Wahrscheinlichkeitstheorie von dem gegenwärtig erreichten unterscheidet. Am Beginn des Bändchens findet man *Foryths* Nachruf auf *Burnside.*

W. Nöbauer, Wien

Elementary Statistics. Von *P. G. Hoel.* (A Wiley Publication in Applied Statistics.) Mit 52 Textabb., VII, 261 S. New York-London: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 5.50.

Das Buch "Introduction to Mathematical Statistics" des Verfassers, das 1954 in zweiter Auflage erschien, ist als einführendes Lehrbuch in die mathematische Statistik best bekannt. Das neue Buch ist keine dritte Auflage, sondern eine vollständige Neubearbeitung. Die Darstellung ist viel elementarer. So kommt darin kein Differentialquotient und kein Integral vor. Nur sehr geringe mathematische Vorkenntnisse werden vom Leser verlangt. Das Buch bringt kurz geschildert: Beschreibende Statistik, Schätzung von Parametern, Prüfen von Hypothesen, Korrelation und Regression, nichtparametrige Methoden, Varianzanalyse, Zeitreihen und Indexzahlen. Letztere wurden vom Verfasser zum erstenmal aufgenommen. Der Inhalt konnte nur deshalb so reich sein, weil viele Formeln und Sätze angeführt und verständlich gemacht, aber nicht bewiesen werden. Das Buch enthält sehr viel erklärenden Text, zahlreiche Aufgaben, aber wenig mathematische Beweise. Es ist pädagogisch ausgezeichnet geschrieben und eine best zu empfehlende erste Einführung in die Mathematische Statistik.

N. Hofreiter, Wien

An Introduction to Mathematical Statistics. Von *H. D. Brunk.* Mit 34 Textabb., XI, 403 S. Boston-New York-Chicago-Atlanta-Dallas-Palo Alto-Toronto-London: Ginn and Company. 1960. Geb. $ 7.—.

Es gibt bereits eine große Anzahl von Büchern über Statistik, deren Niveau sehr verschieden ist. Das Buch steht als ein für Hochschüler geschriebenes einführendes Lehrbuch in der Mitte. Ziel ist, den Studierenden ein klares Verstehen der grundlegenden Begriffe und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik zu vermitteln und sie zur Lösung von Aufgaben zu befähigen. Mit Rücksicht auf wenig vorgebildete Leser erfolgt die Einführung neuer Begriffe durch Beispiele. Sehr viele interessante, aus der Praxis entnommene Beispiele dienen zum Einüben. Ähnlich wie in dem Lehrbuch der mathematischen Statistik von *L. Schmetterer* (das übrigens im Literaturverzeichnis fehlt), beginnt das Buch mit einer gründlichen Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (Teil I). Sie gehört an die Spitze, denn sie ist für ein Verständnis der mathematischen Statistik wesentlich. Bei der Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bedient sich der Verfasser mathematischer Modelle. Dann folgen grundlegende Theoreme, zufällige Variable und Verteilungsfunktionen in ein und mehr Dimensionen. Der zweite, umfassendere Teil des Buches ist der mathematischen Statistik gewidmet. Dazu gehören: Stichproben und ihre Verteilungen, spezielle Verteilungen wie Normal , Binomial , Poisson , χ^2-, F- und t-Verteilungen. Es folgen Schätzungen von Parametern, Maximum-Likelihood-Methode, Konfidenzintervalle, Prüfen von Hypothesen, Regression, Varianzanalyse, parameterfreie Methoden.

Schwierigere Gegenstände wie Grenzwertsätze, Entscheidungstheorie, Sequentialverfahren werden nur kurz behandelt, aber der Leser gewinnt wenigstens einen Einblick. Am Ende stehen Tafeln auf 33 Seiten für die in der Praxis wichtigen Verteilungsfunktionen. *N. Hofreiter*, Wien

The Analysis of Variance. Von *H. Scheffé*. (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) Mit 31 Textabb., XVI, 477 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. Geb. $ 14.—.

Unter den verschiedenen Teilgebieten der mathematischen Statistik ist die Varianzanalyse sehr weit entwickelt, und daher ist eine lehrbuchmäßige Darstellung gerechtfertigt. Vieles, das in dem Buch gebracht wird, war bisher nur in Zeitschriften zu finden. Der Leser muß bereits über einige Kenntnisse aus der mathematischen Statistik verfügen. Ferner soll er die lineare Algebra gut beherrschen, da sich der Autor sehr der Matrizen bedient, wodurch die Darstellung an mathematischer Eleganz gewinnt. Die beiden Kapitel über Vektoralgebra und Matrizenrechnung im Anhang dienen zur Wiederholung, sind aber für ein einführendes Studium in die lineare Algebra viel zu knapp geschrieben. Die Einteilung erfolgt nach mathematischen Modellen. So handelt der erste Teil von Modellen mit festen Effekten. Die ersten zwei Kapitel dieses Teiles bringen allgemeine Theorie (Schätzfunktionen, Konfidenzbereiche, Prüfen von Hypothesen). Dann kommen Anwendungen auf Varianzanalyse und Kovarianzanalyse (z. B. Vergleich der Mittelwerte bei gleicher Streuung, Untersuchung des Effektes von zwei oder mehreren Faktoren, lateinische Quadrate, unvollständige Blöcke). Während im ersten Teil des Buches Modelle mit festen Effekten betrachtet werden, ist der zweite Teil dem Studium anderer Modelle gewidmet (z. B. Modelle mit zufälligen Effekten, gemischte Modelle). Darüber ist keine so allgemeine Theorie vorhanden, wie sie in den ersten zwei Kapiteln des ersten Teiles gegeben werden konnte. Die Darstellung ist nicht leicht. Sie setzt gründliches Mitstudieren voraus. Der Nachdruck liegt auf der mathematischen Behandlung. Doch geben die zahlreichen Aufgaben einen Einblick in die vielseitige Anwendbarkeit der Varianzanalyse. *N. Hofreiter*, Wien

Methods of Correlation and Regression Analysis. Linear and Curvilinear. Von *M. Ezekiel* und *K. A. Fox*. Third Edition. Mit 81 Textabb., XV, 548 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. Geb. $ 10.95.

Das Buch gibt eine sehr breite Einführung in die Statistik und widmet sich in erster Linie der Korrelation und der Regression. Die Begriffe und Sätze werden durch viele Beispiele plausibel gemacht. Es wird gar nicht der Versuch gemacht, die Theorie mathematisch zu beweisen. Es kommt darauf an, dem Leser zu zeigen, wie die verschiedenen Methoden bei praktischen Untersuchungen angewandt werden. Die erste Auflage erschien bereits 1930. In den weiteren Auflagen blieben die Grundzüge ungeändert. Doch wurden viele zeitgemäße Beispiele und manche Methoden neu aufgenommen. Die Verfasser behandeln zunächst die einfache Regression, d. h. Beziehungen zwischen einer unabhängigen zu einer abhängigen zufälligen Variablen. Dann folgen mehrfache Regressionen, wo mehrere unabhängige Variable vorkommen. Neben den linearen werden auch nichtlineare Regressionen ausführlich behandelt. Es werden die Zuverlässigkeit der Aussagen geprüft, Fehlerabschätzungen durchgeführt und Signifikanzbereiche ermittelt. Da viele Formeln nur angegeben, aber nicht bewiesen

werden, so ist die Darstellung für Mathematiker wenig befriedigend. Wertvoll für alle Leser sind die zahlreichen Beispiele aus der Statistik, der Unternehmensforschung und der Ökonometrie. *N. Hofreiter*, Wien

Regression Analysis. Von *E. J. Williams*. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) Mit 5 Textabb., IX, 214 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. Geb. $ 7.50.

Die großen Fortschritte in der Statistik haben dazu geführt, daß Lehrbücher bereits über Teilgebiete existieren. Dazu gehört insbesondere die Varianzanalyse und die Regressionsanalyse. Das vorliegende Buch überschneidet sich mit dem oben besprochenen Buch von *Ezekiel* und *Fox* nur sehr wenig. Der Autor legt Nachdruck auf praktische Probleme. Er kommt mit einem Minimum an Mathematik aus, um die Methoden zu entwickeln. Mit mehr Mathematik ließe sich zwar größere Allgemeinheit und besseres Verstehen erzielen, doch scheint der Verfasser hauptsächlich mit Lesern zu rechnen, deren mathematische Ausbildung gering ist. Die mathematische Theorie ist außerdem zum Teil reichlich schwierig und wird zur Lösung vieler Aufgaben der Praxis nicht gebraucht. Die Methoden werden an vielen Beispielen aus der Landwirtschaft, der Biologie, der Chemie und der Ökonometrie illustriert und verständlich gemacht. Nur in der Praxis bewährte Methoden werden dargestellt und es wird gezeigt, wann die eine, wann die andere Methode vorzuziehen ist. Klarerweise spielt die Methode der kleinsten Quadrate und die Varianzanalyse eine große Rolle. Es werden lineare und polynomiale, einfache und mehrfache Regressionen betrachtet. Im Mittelpunkt steht die Kovarianzanalyse, die zum Prüfen von Hypothesen mit Vorteil verwendet wird. Aus dem weiteren Inhalt seien erwähnt: Signifikanztests, Diskriminantenfunktionen, simultane Regressionsgleichungen und funktionale Relationen zwischen zufälligen Variablen. Am wertvollsten in dem Buch ist die Behandlung zahlreicher Probleme aus der Praxis.

N. Hofreiter, Wien

Grenzverteilung von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Von *B. W. Gnedenko* und *A. N. Kolmogorov*. Wissenschaftliche Bearbeitung der deutschen Ausgabe von *J. Heinhold*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Mathematische Monographien: Band IX.) VIII, 279 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959. Geb. DM 44.—.

Das 1949 in russischer und inzwischen in ungarischer und englischer Sprache erschienene Werk ist nun auch in deutscher Übersetzung erschienen. Im Vorwort wird der Problemkreis umrissen, dem das Buch gewidmet ist. Sein Hauptinhalt ist die Verallgemeinerung und Vertiefung der klassischen Grenzwertsätze. Teil I bringt eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie auf maßtheoretischer Grundlage. Als Untersuchungsmethoden werden die charakteristischen Funktionen bevorzugt. Der Hauptteil (Teil II und III) handelt von Grenzwertsätzen für Summen von unabhängigen Zufallsgrößen. Es werden allgemeine Kriterien für die Konvergenz gegen eine Grenzverteilungsfunktion abgeleitet. Es wird nach den Eigenschaften gefragt, die die Grenzwertverteilungsfunktionen besitzen. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen ermittelt, daß eine Funktion Grenzverteilungsfunktion ist. Nach den allgemeinen Sätzen über die Konvergenz gegen Grenzverteilungsfunktionen folgen Konvergenzuntersuchungen gegen die verschiedenen speziellen Grenzverteilungen, mit denen es die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun hat. So werden Kriterien

ermittelt, wann Konvergenz gegen eine Normalverteilung bzw. gegen eine Poissonsche Verteilung stattfindet. Es werden allgemeine Bedingungen gefunden, unter denen das Gesetz der großen Zahlen gilt. So ergeben sich die klassischen Grenzwertsätze als Spezialfälle. Zuletzt gibt *Gnedenko* eine 17 Seiten lange Übersicht über die Arbeiten zur Theorie der Summen unabhängiger Zufallsgrößen, die in den letzten 10 Jahren erschienen sind. Das Buch ist auf hohem Niveau geschrieben.

N. Hofreiter, Wien

Probability and Statistics. The *Harald Cramér* Volume. Herausgegeben von *U. Grenander*. (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) 434 S. Stockholm: Almquist & Wiksell, New York: J. Wiley & Sons. 1959. Geb. $ 12.50.

Anläßlich des 65. Geburtstages von Prof. *H. Cramer* wurde ein Festband herausgegeben, in dem bedeutende Vertreter der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik interessante Beiträge geliefert haben. Mit Rücksicht auf die große Mannigfaltigkeit der Arbeiten beschränke ich mich auf die Angabe der Titel.

T. W. Anderson: Some scaling models and estimation procedures in the latent class model, *M. S. Bartlett:* The impact of stochastic process theory on statistics, *J. L. Doob:* A Markov chain theorem, *G. Elfing:* Design of linear experiments, *W. Feller:* On combinatorial methods in fluctuation theory, *E. Fix, J. L. Hodges*, and *E. L. Lehmann:* The restricted chi-square test, *U. Grenander:* Some nonlinear problems in probability theory, *M. Kac:* Some remarks on stable processes with independent increments, *D. G. Kendall:* Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition probability matrices, *P. Lévy:* Construction du processus de W. Feller et H. P. McKean en partant du mouvement Brownien, *P. Masani:* Cramér's theorem on monotone matrix valued functions and the Wold decomposition, *P. Masani* and *N. Wiener:* Non-linear prediction, *J. Neyman:* Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses, *H. Robbins:* Sequential estimation of the mean of a normal population, *M. Roesnblatt:* Statistical analysis of stochastic processes with stationary residuals, *C. O. Segerdahl:* A survey of results in the collective theory of risk, *J. W. Tukey:* An introduction to the measurement of spectra, *S. S. Wilks:* Non-parametric statistical inference, *H. Wold:* Ends and means in econometric model building.

N. Hofreiter, Wien

Wahrscheinlichkeit und Information. Von *A. M. Jaglom* und *I. M. Jaglom*. Übersetzung aus dem Russischen. Mit 17 Textabb., 189 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Brosch. DM 9.60.

Das kleine Buch ist für einen breiten Leserkreis gedacht, der weder technische Kenntnisse, noch Kenntnisse aus höherer Mathematik zu besitzen braucht. Es setzt sich das Ziel, den Leser über die neuen und wichtigen Begriffe „Entropie" und „Information" zu unterrichten und ihre Bedeutung in der Nachrichtenübertragung darzutun. Mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen wird die günstigste Kodierung (Verschlüsselung) einer Nachricht ermittelt. Die Informationstheorie erweist sich auch dann als sehr nützlich, wenn Verzerrungen bei Nachrichtenübertragungen auftreten. In dem Buch werden auch einige Aufgaben der Logik durch Berechnung der Information gelöst.

N. Hofreiter, Wien

Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme. Von *A. Adam, F. Ferschl, A. Klamecker, A. Klingst, O. Pichler, J. Roppert, H. Scholz, K. Wenke* und *W. Wetzel.* (Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft: Nr. 9.) 262 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1959. Geb. DM 28.—; kart. DM 24.—.

Der Matrizenkalkül wird bei der Behandlung von vielen Problemen der Wirtschaft und der Statistik in steigendem Maße erfolgreich verwendet. Die Autoren des Buches sind größtenteils in der Wirtschaft tätig oder sie haben wenigstens engen Kontakt mit ihr. *A. Klingst* (Linz) gibt eine recht gut geschriebene Einführung in die Matrizenrechnung und in die Lehre der Determinanten. Weitere Aufsätze von *O. Pichler* (Wesseling) und *K. Wenke* (Ludwigshafen) zeigen zahlreiche Anwendungen der Matrizenrechnung in der Betriebswirtschaft und in der Industrie. *A. Klamecker* (Wien) gibt Anwendungen der Matrizenrechnung in der Volkswirtschaft. Mehr theoretisch sind die Arbeiten von *W. Wetzel* (Berlin) und *F. Ferschl* (Wien) über lineare Programme, Einsatz und Ausstoßanalyse und Spieltheorie. *A. Adam* und *J. Roppert* (beide Wien) bringen Anwendungen des Matrizenkalküls in der Informationstheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Der letzte Aufsatz von *H. Scholz* (Wien) gehört der praktischen Mathematik an und handelt von linearen Gleichungssystemen, Inversion von Matrizen und Eigenwertaufgaben. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Buch zahlreiche Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme bringt und von einem großen Leserkreis mit hohem Interesse gelesen werden wird. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematische Formelsammlung. Von *F. Ringleb.* (Sammlung Göschen: Band 51/51a.) Siebente, erweiterte Auflage. Mit 40 Textabb., 320 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Brosch. DM 5.80.

Im Vergleich zur 6. Auflage, die in dieser Zeitschrift Mh. Math. **61**, 170 (1957) besprochen wurde, enthält die neue Auflage etwas mehr über Matrizen, lineare Gleichungssysteme, mehrfache Integrale, Fouriersche Reihen und Integrale, elliptische Integrale und vor allem über Funktionentheorie, der jetzt ein eigener Abschnitt gewidmet wurde. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematische Formeln. Von *H.-J. Bartsch.* Mit 322 Textabb., 476 S. Leipzig: Fachbuchverlag. 1959. Geb. DM 9.80.

Da es bereits einige Sammlungen von mathematischen Formeln gibt, so besteht derzeit kein besonderer Bedarf. Das vorliegende Werk wird ob seiner zahlreichen Formeln aus elementarer Algebra und Geometrie in erster Linie von Studenten und Technikern benutzt werden. Es enthält auch viele Formeln aus analytischer Geometrie, aus der Differential- und Integralrechnung und über Differentialgleichungen samt Anwendungen. Die vielen Zahlenbeispiele sind zwar in einer Formelsammlung nicht notwendig, doch soll Rücksicht auf mathematisch wenig geschulte Leser genommen werden. Die Formeln sind sorgfältig ausgewählt und klar gesetzt. Der Text ist nicht immer einwandfrei. So kann z. B. eine Ableitung $f'(x)$ nicht immer abermals differenziert werden (siehe hingegen Seite 274!). *N. Hofreiter*, Wien

Tafeln höherer Funktionen — Tables of Higher Functions. Von *Jahnke-Emde-Lösch.* Sechste Auflage. Neubearbeitet von *F. Lösch.* Mit 189 Textabb., XII, 318 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1960. Geb. DM 58.80.

Wenn es auch viele Tafelwerke gibt, so ist das vorliegende doch einzig in seiner Art und daher auch bestbekannt und weit verbreitet. Die früheren Auflagen fanden beste Kritik (auch mehrmals in dieser Zeitschrift). Die 6. Auflage stellt eine Neubearbeitung dar. Die Stoffauswahl erfolgt wie bisher in bewährter Weise, doch ist manches dazugekommen und manches neu gestaltet worden. Dies gilt insbesondere für die Fehlerfunktion, die Fresnelschen Integrale, die elliptischen Funktionen, die orthogonalen Polynome, die Zylinderfunktionen und die konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Die Benutzung der Tafeln wurde noch leichter als bisher gemacht. So ist das Werk auch in seiner neuen Auflage ein unschätzbares Hilfsmittel für alle angewandten Mathematiker.

N. Hofreiter, Wien

Elektronische Analogrechner. Wirkungsweise und Anwendung. Von *D. Ernst.* Mit 227 Textabb., 315 S. München: R. Oldenbourg. 1960. Geb. DM 38.—.

Dieses Buch soll die Wirkungsweise und die Anwendungsmöglichkeiten der Analogrechner beschreiben. Es gliedert sich in mehrere Teile: Analoge und digitale Verfahren und Rechenhilfsmittel. Aufbau und Wirkungsweise elektronischer Analogrechner. Die Programmierung elektronischer Analogrechner. Beispiele für die Behandlung von Aufgaben. Weitere Anwendungsmöglichkeiten und Nachbildung besonderer Funktionszusammenhänge. Anschaffung und Betrieb einer Analogie-Rechenanlage. Ausgeführte elektronische Analogrechner. Wie man sieht, ist dies ein recht umfassendes Buch. Allerdings werden an verschiedenen Stellen vom Leser gewisse Vorkenntnisse vorausgesetzt. Besonders beim einleitenden Kapitel erschwert der Mangel an einfachen Beispielen vielleicht die Verständlichkeit, zumindest für den Anfänger. Das Eingehen auf technische Details erfordert auch gewisse Vorkenntnisse; allerdings liegt dies hier in der Natur der Sache, da ja der Autor nicht noch zusätzlich z.B. einen Lehrgang der Elektrotechnik eingliedern konnte. Der Aufbau der einzelnen Schaltelemente wird recht gründlich und klar dargestellt. Sehr wertvoll wird für den Leser das Kapitel über Programmierung sein, welches zahlreiche ausgeführte Beispiele enthält. An einigen interessanten Anwendungen aus der Praxis wird dem Leser ausführlich vorgeführt, was man alles mit einem Analogrechner zustande bringen kann. Es sei noch auf das Kapitel über die Darstellung besonderer physikalischer Zusammenhänge hingewiesen. Die Abschnitte über die Organisation von Rechenlabors und die schönen Außenansichten bereits vorhandener Maschinen werden für die Einrichtung eines Labors sehr nützlich sein. Das Literaturverzeichnis ist ausgezeichnet. Das Buch enthält eine Menge für den Praktiker brauchbares Material und kann jedem empfohlen werden, der mit Analogrechnern arbeitet.

K. Prachar, Wien

Elemente der Schaltungsalgebra. Eine anschauliche, leichtfaßliche Einführung. Von *U. Weyh.* Mit 104 Textabb., 116 S. München: R. Oldenbourg. 1960. Brosch. DM 13.80.

Dieses Büchlein soll eine anschauliche und leichtfaßliche Einführung in die Methode der Schaltalgebra bieten. Diese besteht in der Angabe eines Rechenkalküls, der es gestattet, die „logischen Eigenschaften" von Schaltungen ohne langes Nachdenken nur durch formale Anwendung des Kalküls zu bestimmen; andererseits dient die Methode auch dazu, Schaltungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften möglichst ökonomisch zu konstruieren. Nachdem die Grundlagen der Algebra der Logik entwickelt werden und die „Theorie" der Schaltalgebra

eingeübt wird, folgen auch zahlreiche interessante Beispiele für die Realisierung von Schaltungen und viele praktische Anwendungen. Überhaupt wird alles pädagogisch sehr geschickt dargestellt und stets an anregenden konkreten Beispielen erläutert. Es ist erstaunlich, wie viel man auf verhältnismäßig kleinem Raum unterbringen und gut erklären kann, wenn man die sonst in Büchern dieser Art nicht selten zu findenden Weitschweifigkeiten vermeidet.

K. Prachar, Wien

Mechanik deformierbarer Körper. Von *M. Päsler*. (Sammlung Göschen: Band 1189/1189a.) Mit 48 Textabb., 199 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1960. Brosch. DM 5.80.

Das Ziel dieses neu erschienenen Bändchens der bekannten Sammlung Göschen ist es, den Leser in die Grundtatsachen der Mechanik deformierbarer Körper einzuführen und mit den wichtigsten Gesetzmäßigkeiten dieses Gebietes vertraut zu machen. Die Ausführungen beginnen mit einem vorbereitenden Abschnitt, in dem enthalten sind: eine Zusammenstellung von späterhin oftmals verwendeten Formeln und Sätzen aus der Vektorrechnung; einiges aus der Tensorrechnung, soweit es zum Verständnis des weiterhin Behandelten benötigt wird, und schließlich einige Ausführungen über die Wellengleichung und ihre Lösung. Nach diesen Vorbereitungen werden in je einem weiteren Abschnitt die grundlegenden Begriffe und Gesetzmäßigkeiten der Mechanik der deformierbaren festen Körper (Elastomechanik) und der Mechanik der Flüssigkeiten und Gase (Hydro- und Aeromechanik) entwickelt. An Hand von Beispielen wird gezeigt, wie die hergeleiteten Grundgleichungen (elastische Grundgleichungen, Eulersche und Stokes-Naviersche Grundgleichungen der Hydrodynamik) zur Behandlung konkreter Probleme zu verwenden sind.

Der behandelte Stoff strebt demnach etwa das gleiche Ziel an, das die Vorlesungen über die „Mechanik deformierbarer Körper" bezwecken, die an den Universitäten und technischen Hochschulen für Studierende der Physik und einige Richtungen der Ingenieurwissenschaften gehalten werden. Daher wird sich das vorliegende Göschen-Bändchen als eine wertvolle Hilfe für Studierende der oben genannten Fachrichtungen bei der Durcharbeitung ihrer Vorlesungsaufzeichnungen erweisen. Außerdem erscheint das neue Bändchen, in dem das behandelte Thema ausschließlich vom Standpunkt der theoretischen Physik aus dargestellt wird, als geeignete Ergänzung einiger anderer Göschen-Bände, wie etwa der Bände Nr. 76 (*Döring*, Einführung in die theoretische Physik), 902 und 903 (*Müller*, Dynamik I, II), in denen nur die Mechanik von Punktsystemen und des starren Körpers behandelt werden, oder einiger vorwiegend auf die Belange des Ingenieurs ausgerichteter Bände, wie etwa der Bände Nr. 953, 961/961a (*Zipperer*, Techn. Schwingungslehre I, II).

Wegen der Klarheit der Darstellung und vor allem auch wegen der zahlreichen Beispiele kann das neue Bändchen allen Studierenden und Lehrenden wärmstens empfohlen werden; sowohl Verfasser wie auch Verlag können zu dem neuen Bändchen beglückwünscht werden.

Th. Sexl, Wien

Classical Dynamics. Von *R. H. Atkin*. Mit 129 Textabb., IX, 273 S. London-Melbourne-Toronto: Heinemann. 1959. Geb. 30 s. net.

Als Gegenstück zu dem Buch des gleichen Verfassers über „Mathematik und Wellenmechanik", das im gleichen Verlag im Jahre 1956 erschien und in dieser Zeitschrift ausführlich besprochen wurde, erscheint nunmehr eine „Klassische Dynamik", die wieder sehr einfach und klar geschrieben ist und von dem

vorausgesetzten Leserkreis (Hörer der Anfängervorlesungen über Mechanik an den Hochschulen) wärmstens begrüßt werden wird. Nach einer historischen Übersicht über die Begründung der Mechanik und einer Einführung in die Theorie der Vektorrechnung wird die Kinematik und Dynamik eines einzelnen Massenpunktes, daran anschließend die eines Systems von Massenpunkten und die des ebenen starren Körpers behandelt. Es folgt eine Übersicht über den Lagrangeschen Formalismus und eine Kinematik und Dynamik des starren Körpers im Raum. Ein Kapitel über kleine Schwingungen beschließt das Buch. Wegen der Klarheit der Darstellung und vor allem auch wegen der zahlreichen Beispiele kann das Buch allen Studierenden und Lehrenden besonders empfohlen werden. An der glücklichen Auswahl der Beispiele zeigt sich jenes gerade im angelsächsischen Schrifttum sehr häufig anzutreffende pädagogische Geschick, das imstande ist, den Studierenden für die behandelten Probleme nicht nur zu interessieren, sondern geradezu dafür zu begeistern. *Th. Sexl*, Wien

The Theory of Thin Shells. Von *V. V. Novozhilov*. Englische Übersetzung aus dem Russischen von *P. G. Lowe*. Herausgegeben von *J. R. M. Radok*. Mit 95 Textabb., XVI, 376 S. Groningen: P. Noordhoff. 1959. Dfl. 36.—; $ 9.50.

In der Elastizitätstheorie ist heutzutage die Theorie dünner, gekrümmter Platten wieder modern geworden, da Konstruktionen, die geringes Gewicht mit größter Beanspruchung ermöglichen, äußerst wichtig für praktische Anwendungen sind. Sowjetische Wissenschaftler einschließlich des Autors haben in den letzten 15 bis 20 Jahren entscheidende Beiträge zu dieser Theorie geliefert. Es ist daher zweifellos außerordentlich begrüßenswert, wenn vom Autor als Spezialisten auf diesem Gebiet die russischen Arbeiten zusammenfassend (und durch die englische Übersetzung auch dem nichtrussischen Publikum zugänglich) vorgelegt werden. Die in dem vorliegenden Buche gebrachte Theorie beschränkt sich auf solche Probleme, bei denen die Verschiebungen als klein betrachtet werden können gegen die Dicke der Platte und die Spannungen noch proportional sind den wirkenden Kräften. Die mathematische Behandlung der Probleme erfolgt von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus, der durch eine möglichst weitgehende Heranziehung des in der Züricher Schule entwickelten Verfahrens der komplexen Transformationen charakterisiert werden kann. Das Buch zerfällt in 4 Kapitel, von denen das erste die allgemeine Theorie dünner elastischer Platten unter Berücksichtigung von auftretenden Momenten, das zweite die Theorie der Membrane und das dritte und vierte spezielle in der Praxis wichtige Probleme, darunter das Problem der zylindrischen Platten beeinhaltet. Zahlreiche, durchgerechnete Beispiele erleichtern dem Leser das Verständnis der allgemeinen Theorie. Die Übersetzung vom russischen ins englische erfolgte möglichst wortgetreu. Das Buch dürfte sich für alle auf diesem Gebiet arbeitenden Physiker und Ingenieure bald als unentbehrliches Nachschlagewerk erweisen. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Fortsetzung von der IV. Umschlagseite

R. J., D. N. Lascody and **D. S. Merrilees,** Impulsive Midcourse Correction of an Interplanetary Transfer. **Handel, P. F. von,** and **F. Hoehndorf,** Accuracy Limits in Electronic Tracking of Space Vehicles. **Kooy, J. M. J.,** On the Numerical Computation of Free Trajectories of a Lunar Space Vehicle. **Miele, A.,** On the Flight Path of a Hypervelocity Glider Boosted by Rockets. **Partel, G.,** and **A. Angeloni,** Rocket Postal Service. Part II: Intercontinental Connection. **Plimmer, R. N. A.,** Fuel Requirements for Inter-Orbital Transfer of a Rocket. **Rosen, M. W.,** and **F. C. Schwenk,** A Rocket for Manned Lunar Exploration. **Ruppe, H. O.,** Minimum Energy Requirements for Space Travel. **Scala, S. M.,** A Study of Hypersonic Ablation. **Sinra, I.,** Interplanetary Navigation. **Stearns, E. V.,** Interplanetary Homing. **Warren, W. R.,** Laboratory Experimental Studies in Re-entry Aerothermodynamics. **Wolczek, O.,** On the Technical Realisation of Subgravity and Weightlessness. **Raketenantriebe: Boden, R. H.,** Recent Developments and Designs of the Ion Rocket Engine. **Crane, W. W. T.,** Space Power. **Kantrowitz, A.,** Application of Magnetohydrodynamics to Astronautics. **Kuskevics, G.,** Ion Rocket Efficiency Studies. **Leitmann, G.,** Some Remarks on the Optimum Operation of a Nuclear Rocket. **Lykoudis, P. S.,** and **J. P. Schmitt,** Unsteady Compressible Magnetic Laminar Boundary Layers in Hypersonic Flow. **Meyer, R. X.,** Magnetohydrodynamics and its Application to Propulsion and Re-entry. **Napolitano, L. G.,** and **A. Pozzi,** Compressible Flat Plate Boundary Layer of an Electrically Conducting Fluid in the Presence of Magnetic Fields. **Newgard, J. J.,** and **M. M. Levoy,** Nuclear Rocket Missions and Associated Power Plants. **Perrier, P.,** Etude d'un échangeur de chaleur par convection et rayonnement pour un autopropulseur fissiothermique. **Reingold, L.,** Etude théorique et expérimentale des mélanges propergoliques. Mesure des rendements de combustion. **Sänger, E.,** On the Directing of Intense Photonic Beams by Means of Electron Gas Mirrors. **Thackwell, H. L., Jr.,** The Application of Solid Propellants to Space Flight Vehicles. **Ulam, J.,** Sur deux types de propulseurs électriques. **Waniek, R. W.,** Problems of Magnetic Propulsion of Plasma. **Zipkin, M. A.,** and **E. Schnetzer,** Design Compromises in Space Power Systems. **Künstliche Satelliten: Beletsky, V. V.,** Libration of an Artificial Earth Satellite. **Detra, R. W., A. R. Kantrowitz, F. R. Riddell** and **P. H. Rose,** The Drag Brake Manned Satellite System. **Groves, G. V.,** and **M. J. Davies,** Methods of Analysing Observations on Satellites. **Hilton, W. F.,** Re-entry Paths for Manned Satellites. **Knothe, H.,** Some New Methods of Satellite Orbit Calculations and Stability Problems. **Kumar, S. K.,** and **B. R. Rau,** Design Study of an Earth Satellite Evolving from a Four-Step Solid Propellent Rocket Vehicle. **de Orús, J. J.,** On the Apparent Motion of an Earth's Artificial Satellite. **Paiewonsky, B.,** The Motion of an Orbiting Vehicle Subjected to Continuous Radial Thrust, Including a Study of Planetary Encounters. **Rowell, L. N.,** and **M. C. Smith,** Secular Variation in the Inclination of the Orbit of Earth Satellite (1057 β) and Air Drag. **Tharrats, J.,** Relativity Advances of the Perigee of Artificial Earth Satellites. **Raumfahrtbiologie und -medizin: Andersen, C. E.,** The Corpuscular Rays from the Sun. **Beckh, H. J. von,** Multi-Directional-*G*-Protection During Experimental Sled Runs. **Davies, R. W.,** and **M. G. Comuntzis,** The Sterilization of Space Vehicles to Prevent Extraterrestrial Biological Contamination. **Davies, I.,** and **J. D. Fulton,** The Reactions of Terrestrial Microorganisms to Simulated Martian Conditions. **Eugster, J.,** and **D. G. Simons,** Results of Experiments on the Biological Effects of Cosmic Radiation on Seeds of Hordeum (Gold Barley) Bonus 01518/B 19 (Gustafsson), with Special Consideration of Heavy Primaries Effects. **Flickinger, D.,** Personnel Selection and Training for Space Flight. **Graybiel, A., J. H. McNinch** and **R. H. Holmes,** Observations on Small Primates in Space Flight. **Haviland, R. P.,** The Biological Satellite. **Steinkamp, G. R., W. R. Hawkins** and **G. T. Hauty,** Experiments in Space Cabin Simulators. **Strughold, H.,** The Human Eye in Space (Physiologic Aspect). **Vaeth, J. G.,** Prediction of Man's Performance in Space Using Flight Simulators and Balloon-Borne Systems. **Violette, F. H., Boiteau** et **S. Bernard,** Les limites de la survie en cabine étanche au cours des voyages interplanétaires.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

X^th International Astronautical Congress
X. Internationaler Astronautischer Kongress
X^e Congrès International d'Astronautique
London 1959

Proceedings Bericht Comptes rendus

Herausgegeben von

W. v. Braun, A. Eula, B. Fraeijs de Veubeke, F. Hecht, W. B. Klemperer, J. M. J. Kooy, F. I. Ordway III, E. Sänger, K. Schütte, L. I. Sedov, L. R. Shepherd, J. Stemmer

Schriftleitung: **F. Hecht**

Mit 464 Figuren. XIII, 946 Seiten. Gr.-8°. 1960

Ganzleinen S 1380.—, DM 230.—, sfr. 235.50, $ 54.75

Vorzugspreis für Mitglieder der an die IAF angeschlossenen Gesellschaften und für Bezieher der „Astronautica Acta":

Ganzleinen S 1104.—, DM 184.—, sfr. 188.40, $ 43.80

Inhaltsverzeichnis: **Astronautik, Allgemeines: Dryden, H. L.,** Global Aspects of the Exploration of Space. **Katz, A. H.,** Observation Satellites: Problems, Possibilities and Prospects. **Erforschung der hohen Atmosphäre: Hutchinson, H. P.,** and **P. R. Arendt,** Ionospheric Scintillations of Satellite Signals. **Istomin, V. G.,** Some Results of the Measurement of the Mass Spectrum of Positive Ions by the 3rd Artificial Earth Satellite. **King-Hele, D. G.,** Determination of Air Density and the Earth's Gravitational Field from the Orbits of Artificial Satellites. **Krassovsky, V. I., I. S. Shklovsky, G. I. Galperin** and **E. M. Svetlitsky,** On Fast Corpuscles of the Upper Atmosphere. **Paetzold, H. K.,** and **H. Zschörner,** The Fluctuation of the Accelerations of Satellites and the Changing of the Upper Atmospheric Conditions. **Shklovsky, I. S.,** and **V. G. Kurt,** Determination of Atmospheric Density at an Altitude of 430 km by the Sodium Vapour Diffusion Method. **Raumfahrtphysik, Astrophysik: Boneff, N.,** Sur le danger météoritique en astronautique (2me partie). **Davies, M. E.,** Lunar Exploration by Photography from a Spac Vehicle. **Dubin, M.,** The Meteoritic Environment from Direct Measurements. **Gold, L.,** Gravitational-Magnetic Origin of Sunspots and Related Phenomena. **Gröbner, W.,** and **F. Cap,** The Three-Body Problem Earth-Moon-Spaceship. **Herrick, S., L. G. Walters** and **C. G. Hilton,** Differential Expressions for Low-Eccentricity Geocentric Orbits. **Newton, R. R.,** Tracking Objects Within the Solar System Using Only Doppler Measurements. **Ostinelli, E.,** Funzioni del rapporto di massa in campo relativistico. Formulazione generale per qualunque velocità di trasferimento e di getto. **Roglá Altet, V.,** Voyage aux étoiles. Etudes de la fusée d'après le principe de relativité. **Schmidt, Ingeborg,** The "Green" Areas of Mars and Color Vision. **Singer, S. F.,** Present Status of the Earth's Radiation Belt. **Subotowicz, M.,** Theorie der relativistischen n-Stufenrakete. **Sun, F.-T.,** Launching Conditions and the Geometry of Orbits in a Central Gravity Field. **Woodbridge, D. D.,** and **W. N. Arnquist,** Measurement of Jupiter Re-entry Radiation. **Raumfahrttechnik: Bjork, R. L.,** Effects of a Meteoroid Impact on Steel and Aluminium in Space. **Boni, A.,** Telecomunicazioni spaziali e caratteristiche dei loro canali. **Callede, G.,** Les aériens á grand gain. **Chapman, D. R.,** On the Corridor and Associated Trajectory Accuracy for Entry of Manned Spacecraft into Planetary Atmospheres. **Connors, T. L., W. K. Huggett** and **A. C. Lawson, Jr.,** Line-of-Sight Criteria for Interplanetary Navigation. **Cremona, C. E.,** e **D. Cunsolo,** La sostentazione getto-orbitale nei trasporti ultraveloci. **Cross, C. A.,** A Practical Investigation of Spaceship Control Problems. **Gunkel,**

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite